Einige Eigenschaften analytischer Mengen in kompakten komplexen Mannigfaltigkeiten

Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades der
Mathematisch - Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Georg - August - Universität zu Göttingen

vorgelegt von
Wolf Barth
aus Wernigerode

Göttingen 1967

Einige Eigenschaften analytischer Mengen in kompakten komplexen Mannigfaltigkeiten

Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades der
Mathematisch - Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Georg - August - Universität zu Göttingen

vorgelegt von
Wolf Barth
aus Wernigerode

Göttingen 1967

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Referent: Professor Dr. R. Remmert
Korreferent: Professor Dr. H. Grauert

Tag der mündlichen Prüfung: 5.5. 1967

INHALT

Notation iv
§ 0 Einführung v

I Vorbereitungen

§ 1 Analytische Homologieklassen 1
§ 2 Normale komplexe Räume - Faktorisierung holomorpher Abbildungen 5
§ 3 Pseudokonkavität 8
§ 4 Komplexe Lie-Gruppen und homogene Mannigfaltigkeiten 11

II Abbildungstheorie

§ 5 Eine Halbgruppe von Abbildungen 14
§ 6 Linearsysteme ohne Basispunkte 16
§ 7 Über die Homologieklasse der σ_F-Fasern 22
§ 8 Spezialfall: X projektiv-algebraisch 28

III Pseudokonkavität

§ 9 Umgebungen analytischer Mengen in homogenen Mannigfaltigkeiten 33
§ 10 Schlauchgebiete im komplexen P^n 37
§ 11 Schlauchgebiete in komplexen Periodentori 43
§ 12 Ein Fortsetzungssatz 45

NOTATION

Ein komplexer Raum ist ein reduzierter komplexer Raum im Sinne von SERRE (vgl. [8]). Jede komplexe Mannigfaltigkeit wird zusammenhängend vorausgesetzt.

Ein projektiv-algebraischer Raum ist ein komplexer Raum, der biholomorph äquivalent ist, zu einer analytischen Teilmenge eines komplex-projektiven Raums.

Ist V ein C-Vektorraum, so sei Proj V der projektive Raum $V - \{0\} / \mathbb{C}^*$. $P^n = P^n(\mathbb{C})$ sei der n-dimensionale komplex-projektive Raum.

Sind φ_1 und φ_2 Abbildungen der Menge X auf Mengen Y_1 und Y_2, so sei $\varphi_1 \times \varphi_2$ die durch

$$(\varphi_1 \times \varphi_2)(x) := (\varphi_1(x), \varphi_2(x)), \quad x \in X$$

definierte Abbildung von X in $Y_1 \times Y_2$.

Ist X komplexe Mannigfaltigkeit, bzw. x gewöhnlicher Punkt des komplexen Raums X, so sei T(x,X) der komplexe (kontravariante) Tangentialraum von X in x. Der relle Tangentialraum werde mit $T_R(x,X)$ bezeichnet.

Ist $f: X \to Y$ holomorph, und sind T(x,X) sowie T(fx,Y) erklärt, so sei $df: T(x,X) \to T(fx,Y)$ das Differential von f.

Eine holomorphe Abbildung heißt zusammenhängend (bzw. endlich), wenn jede Faser zusammenhängend (bzw. endlich) ist; sie heißt eigentlich, wenn das Urbild eines jeden Kompaktums wieder kompakt ist.

Ist $\sigma: X \to Y$ holomorph, so sei für jede natürliche Zahl $d \geq 0$ die Entartungsmenge

$$X_\sigma(d) := \{x \in X: \dim_x \sigma^{-1}(\sigma x) \geq d\}.$$

definiert. Die Mengen $X_\sigma(d)$ sind analytisch in X (REMMERT [13])

Unter der Dimension eines komplexen Raumes wird stets die komplexe Dimension verstanden (ausgenommen in 1.3). Mit $\dim_x X$ wird die Dimension im Punkte $x \in X$ bezeichnet.

Die Zusammenhangskomponente eines topologischen Raums X im Punkt x werde mit $Z_x(X)$ bezeichnet.

§ 0 Einführung.

I) Im Jahre 1961, bzw. 1963 veröffentlichten R. REMMERT und T. VAN DE VEN die beiden Arbeiten [15] und [16]. In [16] werden u.a. holomorphe Funktionen auf Umgebungen analytischer Mengen in homogenen komplexen Mannigfaltigkeiten untersucht. Das Hauptergebnis aus [16] ließe sich sehr leicht folgern, wenn man wüßte das diese Umgebungen pseudokonkav sind im Sinne von [2]. Überdies erhielte man zusätzlich Aussagen über meromorphe Funktionen auf diesen Umgebungen. Die folgende Frage liegt also nahe:

1) Sind derartige Gebiete in gewissen homogenen Mannigfaltigkeiten pseudokonkave komplexe Räume?

Dies hängt zusammen mit der Frage:

2) Gibt es allgemeine Methoden, das Beispielmaterial aus [15] zu klassifizieren?

Beide Fragen werden hier zum Teil positiv beantwortet werden können. Die Arbeit besteht aus zwei Teilen. Davon beschäftigt sich der erste mit holomorphen Abbildungen, die durch Hyperflächen auf komplexen Mannigfaltigkeiten charakterisiert werden können, der zweite mit den Umgebungen analytischer Mengen auf homogenen kompakten komplexen Mannigfaltigkeiten.

II) Im ersten Kapitel finden sich die nötigen Vorbereitungen. Das zweite Kapitel zeigt die enge Beziehung auf zwischen der rationalen Homolgie und den Abbildungseigenschaften projektiv-algebraischer Mannigfaltigkeiten. Es werden gleichzeitig zwei Methoden aus verschiedenen Bereichen der komplexen Analysis verwendet: Bekannte Eigenschaften der Linearsysteme aus der klassischen algebraischen Geometrie ergeben zusammen mit Aussagen über analytische Homologieklassen, wie sie von BOREL und HAEFLIGER in [3] bewiesen wurden, einen gewissen Überblick über alle zusammenhängenden holomorphen Abbildungen einer projektiv-algebraischen Mannigfaltigkeit X auf normale projektiv-algebraische Räume. Die Aquivalenzklassen solcher Abbildungen können zu einer abelschen Halbgruppe $P(X)$ zusammengefaßt werden. Ebenso bilden die analytischen Homologieklassen, welche von holomorphen Divisoren auf X repräsentiert

werden, eine abelsche Halbgruppe H(X). Das zentrale Ergebnis des ersten Kapitels ist der Hauptsatz:

Es gibt einen Halbgruppenepimorphismus $H(X) \to P(X)$.

Da H(X) abzählbar ist, hat man die Folgerung:

Es gibt nur abzählbar viele nicht äquivalente zusammenhängnende holomorphe Abbildungen einer projektiv-algebraischen Mannigfaltigkeit auf normale projektiv-algebraische Räume.

Die verwendeten Methoden sind eine Weiterentwicklung von Beweisideen, wie sie REMMERT und VAN DE VEN in [15] benutzen. Mehrere Ergebnisse aus [15] sind mit Hilfe des Hauptsatzes einfach zu deuten. Da die Halbgruppe H(X) in den einfachsten Fällen leicht zu untersuchen ist, ergibt sich noch:

Ist $b^a_{2n-2}(X) = 1$ (n = dim X), so besitzt P(X) höchstens zwei Elemente (nämlich die identische und die konstante Abbildung). Ist $b^a_{2n-2}(X) = 2$, so enthält P(X) höchstens vier Elemente.

III) Im dritten Kapitel der Arbeit werden die von ANDREOTTI in [2] bewiesenen Eigenschaften pseudokonkaver Räume benutzt, um zu ähnlichen Ergebnissen zu kommen, wie REMMERT und VAN DE VEN sie in [16] zeigten. Zunächst ergibt sich aus der Zweifachhomogenität des komplex-projektiven P^n:

Jede zusammenhängnede Umgebung einer nichtdiskreten algebraischen Menge des P^n ist pseudokonkav.

Dieses Ergebnis läßt sich in abgeschwächter Form auf Unterräume des P^n übertragen. Durch Anwendung eines Theorems aus [2] ergibt sich hieraus der

Fortsetzungssatz für analytische Mengen: Es sei $X \subset P^k$ ein irreduzibler quasi-projektiver Raum. Es gebe eine reindimensionale algebraische Menge $Y \subset P^k$ mit dim X + dim Y > k, und $X \cap Y$ besitze eine kompakte Zusammenhangskomponente. Dann läßt sich X zu einer algebraischen Menge des P^k fortsetzen.

Ein Spezialfall dieses Satzes ist ein Ergebnis von ROTHSTEIN aus [18].

Aus diesem Fortsetzungssatz für analytische Mengen erhält man einen Fortsetzungssatz für meromorphe Funktionen in dem Spezialfall, daß A eine Darstellung als Durchschnitt von höchstens k-1 Hyperflächen in P^k besitzt. Jedoch erhält man diesen Satz für dim $A \geq 2$ auch ohne Benutzung von [2] leicht mit Hilfe bekannter Methoden (s.10.6).- In § 12 wird schließlich gezeigt, daß man für $2 \cdot \dim A > k$ auf diese Durchschnittsbedingung verzichten kann.

Weiter wird noch die Pseudokonkavität von Umgebungen analytischer Mengen auf komplexen Periodentori untersucht. Man kann nicht erwarten, daß jedes derartige Gebiet pseudokonkav ist. Jedoch wird bewiesen:

Es sei A eine zusammenhängende analytische Menge auf dem komplexen Periodentorus X und $A^* \subset X$ die von A bestimmte natürliche Faser. Dann ist jede zusammenhängende Umgebung von A in A^* pseudokonkav.

Herrn Professor R. Remmert möchte ich für die Anregung und Förderung dieser Arbeit meinen besonderen Dank aussprechen.

I
VORBEREITUNGEN

§ 1 Analytische Homologieklassen

1.1 Analytische Zyklen.- Es sei X ein kompakter komplexer Raum. Dann werde definiert:

Ein analytischer Zyklus auf X ist eine formale Linear - kombination $\sum_{1}^{<\infty} a_\nu A_\nu$, wo die a_ν ganze Zahlen und die $A_\nu \subset X$ irreduzible analytische Mengen sind.

Ein holomorpher Zyklus auf X ist ein analytischer Zyklus $\sum a_\nu A_\nu$, wo alle $a_\nu \geq 0$ sind.

Jede analytische Teilmenge $A \subset X$ definiert einen holomor - phen Zyklus: nämlich die Summe $\sum A_\nu$ über alle ihren irredu - ziblen Komponenten.

1.2 Analytische Homologieklassen.- Es sei A eine ana - lytische Menge in dem kompakten komplexen Raum X. Nach GIESECKE [6] gibt es eine Triangulation von X so, daß A ein abgeschlossener Teilkomplex des entstehenden Simplizi - alkomplexes wird. A repräsentiert dann eine Homologieklasse

$$\zeta(A) \in H_*(X,Z).$$

Allgemeiner bestimmt jeder analytische Zyklus $\sum a_\nu A_\nu$ auf X eine Homologieklasse $\sum a_\nu \zeta(A_\nu)$. Alle derartigen Homologie - klassen bilden eine Untergruppe

$$H^a_*(X,Z) = \bigoplus_q H^a_{2q}(X,Z) \subset H_*(X,Z).$$

Diese heißt Untergruppe der analytischen Homologieklassen von X. Eine analytische Homologieklasse heißt holomorphe Homologieklasse, wenn man sie durch einen holomorphen Zyklus repräsentieren kann. Der Rang $b^a_{2q}(X)$ von $H^a_{2q}(X,Z)$ heißt $2q$ - te analytische Betti - Zahl von X.

Ist $f:X\to Y$ eine holomorphe Abbildung zwischen den kompakten komplexen Räumen X und Y, so gilt für jede irreduzible analytische Teilmenge $A\subset X$

$$f_*\zeta(A) = \gamma\zeta(fA),$$

wo γ der Abbildungsgrad von $f|A$ ist. Für $\dim fA < \dim A$ ist $\gamma = 0$ zu setzen. Hierzu siehe REMMERT – STEIN [14] und BOREL – HAEFLIGER [3].

1.3 Schnitttheorie nach HOPF [10].– Auf Mannigfaltigkeiten kann man ein Schnittprodukt $\alpha\circ\beta$ zwischen Homologieklassen α und β einführen. Ist die Mannigfaltigkeit X orientierbar und $m = \dim_{\mathbb{R}} X$, so hat man die bekannten Operatoren

$$\nabla: H_q(X,Z)\to H^{m-q}(X,Z), \quad \Delta: H^q(X,Z)\to H_{m-q}(X,Z)$$

der Poincaré – Dualität. Sie liefern den Zusammenhang des Schnittprodukts mit dem Cup – Produkt:

$$\alpha\circ\beta = \Delta(\nabla\alpha\smile\nabla\beta).$$

Zu einer stetigen Abbildung $f:X\to Y$ in eine Mannigfaltigkeit Y gehört der Hopfsche Umkehrhomomorphismus $\underline{f}: H_*(Y,Z) \to H_*(X,Z)$ der durch

$$(H) \qquad \underline{f}\alpha := i_*(\gamma\circ\xi\times\alpha)$$

definiert wird. Dabei ist $i:G\to X$ der Isomorphismus zwischen X und dem Graph $G\subset X\times Y$ der Abbildung f, γ die Klasse von G und ξ die von X, und das Schnittprodukt in der Mannigfaltigkeit $X\times Y$ zu nehmen. Es ist $\underline{f} = \Delta f^*\nabla$. Für $\alpha\in H_*(X,Z)$ und $\beta\in H_*(Y,Z)$ gilt die Projektionsformel

$$f_*(\alpha\circ\underline{f}\beta) = f_*\alpha\circ\beta.$$

1.4 Schnitttheorie auf komplexen Räumen.– In [3] wird gezeigt, daß man in komplexen Räumen für zwei analytische Zyklen einen (analytischen) Schnittzyklus definieren kann. Ist A, bzw. B eine irreduzible a –, bzw. b – dimensionale analytische Teilmenge des n – dimensionalen komplexen Raums X, und haben alle irreduziblen Komponenten C_μ, $1\le\mu\le m$, des Durchschnitts $A\wedge B$ die Dimension $a+b-n$, so ist der Schnittzyklus von A und B gerade

$$A.B = \sum_1^m C_\mu\, i(A.B,C_\mu)$$

mit gewissen Schnittmultiplizitäten $i(A.B,C_\mu)$. Wie diese Multiplizitäten sich in Spezialfällen berechnen, dazu vgl. [3].

Falls X singularitätenfrei ist, gilt stets

$$\zeta(A) \circ \zeta(B) = \Sigma \zeta(C_\mu) \cdot i(A.B, C_\mu).$$

1.5 Projektiv-algebraische Räume.- Der Schnittring des komplex-projektiven P^n ist bekanntlich

$$H_*(P^n, Z) = Z[x]/(x^n).$$

Die erzeugende Klasse wird dabei repräsentiert durch die Hyperebenen $P^{n-1} \subset P^n$. Ist $A \subset P^n$ eine irreduzible k-dimensionale analytische Menge, so kann man (vgl. etwa [4]) einen $P^{n-k} \quad P^n$ finden, der A in endlich vielen Punkten "allgemein" schneidet. Die Anzahl der Schnittpunkte ist

$$\zeta(A) \circ \zeta(P^{n-k}) > 0$$

und heißt der Grad von A.

Hieraus folgt, daß außer dem Null-Zyklus kein holomorpher Zyklus in einem P^n - oder allgemeiner in einem projektiv-algebraischen Raum - nullhomolog ist.

1.6 Divisoren.- Auf der komplexen Mannigfaltigkeit X seien $\mathcal{O}^*$ die Garbe der Keime nicht verschwindender lokaler holomorpher Funktionen auf X und $\mathcal{M}^*$ die Garbe der Keime nicht identisch verschwindender lokaler meromorpher Funktionen auf X, beide aufgefaßt als Garbe von (multiplikativen) Gruppen. Ein Schnitt in der Quotientengarbe $\mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*$ heißt Divisor auf X. Die Divisoren auf X stehen in eineindeutiger Zuordnung zu den 1-codimensionalen analytischen Zyklen auf X. Jede Hyperfläche (:= 1-codimensionale analytische Menge) in X bestimmt einen holomorphen Zyklus und dann auch einen Divisor auf X.

Hat X Singularitäten, so ist im allgemeinen nicht jede Hyperfläche lokal das Nullstellengebilde einer einzigen holomorphen Funktion. Es bestimmt also jeder Divisor einen analytischen Zyklus der Codimension 1, aber nicht umgekehrt. Ein Divisor heißt holomorph, wenn der zugehörige analytische Zyklus holomorph ist.

Man hat eine exakte Gruppensequenz

$$0 \to \Gamma(X,\mathcal{O}^*) \to \Gamma(X,\mathcal{M}^*) \to \Gamma(X,\mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*) \to H^1(X,\mathcal{O}^*) \to \dots$$

Jede meromorphe, lokal nicht identisch verschwindende Funktion f auf X bestimmt so einen Divisor: den Hauptdivisor (f). Es ist

$$(f) = N(f) - P(f),$$

wo N(f) und P(f) der Nullstellen - und Polstellendivisor von f sind. Zwei Divisoren heißen linear äquivalent, falls ihre Differenz Hauptdivisor ist. Sind zwei Divisoren D_1 und D_2 auf einer Mannigfaltigkeit linear äquivalent, so sind die von ihnen repräsentierten Homologieklassen gleich:

$$\zeta(D_1) = \zeta(D_2).$$

Ist $f: X \to Y$ holomorph, so wird ein Gruppenhomomorphismus

$$f^{-1}: \Gamma(Y,\mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*) \to \Gamma(X,\mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*)$$

induziert. Falls X und Y Mannigfaltigkeiten sind, gilt für die Homologieklassen:

$$f\,\zeta(D) = \Delta f^* \nabla \zeta(D) = \zeta(f^{-1}D).$$

1.7 Geradenbündel.- Unter einem Geradenbündel über dem komplexen Raum X soll im Folgenden immer ein holomorphes Bündel mit Faser $\mathbb{C}$ und Strukturgruppe $\mathbb{C}^*$ verstanden werden. Die Gruppe der Isomorphieklassen solcher Bündel ist isomorph zu $H^1(X,\mathcal{O}^*)$. Vermöge der exakten Sequenz aus 1.6 bestimmt also jeder Divisor ein $\mathbb{C}^*$ - Bündel . Wie sich das von D bestimmte Bündel $[D]$ genau beschreibt, dazu siehe (für den Spezialfall einer Mannigfaltigkeit X) HIRZEBRUCH [9], p. 112.

Ist s ein meromorpher Schnitt in einem Geradenbündel F über X, so gibt es zu jedem Punkt $x \in X$ eine Umgebung $U \subset X$, über der s durch eine meromorphe Funktion s_u gegeben wird. Hat man noch eine andere Umgebung $V \subset X$, so ist s_u/s_v eine nicht verschwindende holomorphe Funktion über $U \cap V$. Der Schnitt s definiert also, ganz wie eine meromorphe Funktion Divisoren (s), N(s) und P(s) über X.

In dem Geradenbündel $[D]$ hat man kanonische holomorphe Schnittflächen s mit $(s) = N(s) = D$. Für zwei holomorphe Schnittflächen s und t in F ist s/t eine globale meromorphe

Funktion über X. Die Divisoren N(s) und N(t) sind also linear äquivalent. Ist umgekehrt s ein holomorpher Schnitt in F und f eine meromorphe Funktion auf X so, daß der Divisor N(s)-P(s) holomorph ist, so ist auch fs ein holomorpher Schnitt in F. Es folgt: Zu jedem $s \subset \Gamma(X,F)$ und zu jedem zu N(s) linear äquivalenten Divisor D gibt es einen Schnitt $t \in \Gamma(X,F)$ mit N(t) = D.

Ist $\varphi: X \to Y$ holomorph und D ein Divisor auf Y, so gilt

$$[\varphi^{-1}D] = \varphi^*[D].$$

§ 2 Normale komplexe Räume - Faktorisierung holomorpher Abbildungen

2.1 Normale Räume.- Ein komplexer Raum X heißt normal, wenn der Stellenring $\mathcal{O}_x$ in jedem Punkt $x \in X$ normal ist. Normalität ist äquivalent mit der Gültigkeit der Riemann - schen Fortsetzungssätze. Auf normalen komplexen Räumen gilt das später wichtige

Holomorphiekriterium (REMMERT - STEIN): Es sei $\sigma: Y \to Z$ eine Abbildung normaler komplexer Räume. Gibt es eine eigentliche holomorphe Abbildung τ eines zusammenhängenden normalen komplexen Raumes X auf Y, so, daß $\sigma\tau: X \to Z$ holomorph ist, so ist auch σ holomorph (und insbesondere stetig).

Zum Beweis siehe [13] und [20].

Jede Mannigfaltigkeit ist normal. Jede normale Kurve (:= eindimensionaler komplexer Raum) ist singularitätenfrei.

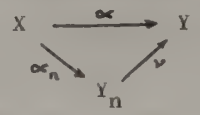
2.2 Äquivalente Abbildungen.- Zwei holomorphe Abbildungen σ_1 und σ_2 des komplexen Raums X auf komplexe Räume $\sigma_1 X$ und $\sigma_2 X$ heißen äquivalent, wenn es eine biholomorphe Abbildung $\tau: \sigma_1 X \to \sigma_2 X$ gibt mit $\tau \circ \sigma_1 = \sigma_2$. Äquivalente Abbildungen wollen wir als nicht wesentlich verschieden ansehen.- Aus obigem Holomorphiekriterium folgt, daß eine bijektive holomorphe Abbildung eines normalen komplexen Raums auf einen anderen normalen Raum äquivalent zur Identität ist.

2.3 Normalisierung komplexer Räume.- Die Normalisierung Y_n eines komplexen Raumes Y ist bis auf Äquivalenz eindeutig bestimmt durch (vgl. [8]):

a) Y_n ist normal

b) es gibt eine holomorphe Abbildung $\nu: Y_n \to Y$ von Y_n auf Y

c) jede holomorphe Abbildung $\alpha: X \to Y$ eines normalen kom - plexen Raums auf Y läßt sich eindeutig faktorisieren:



Ist der komplexe Raum Y projektiv-algebraisch, so ist nach einem Satz von GROTHENDIECK und REMMERT [7] auch Y_n projektiv - algebraisch.

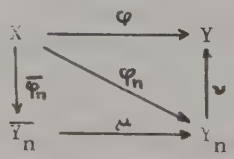
2.4 STEIN - Faktorisierung.- Es sei X eine zusammenhän - gende komplexe Mannigfaltigkeit und $\varphi: X \to Y$ eine eigentliche holomorphe Abbildung von X auf einen normalen komplexen Raum Y. Dann existiert (vgl. [14]) ein normaler komplexer Raum $\overline{Y}$ mit

a) es gibt eine Überlagerungsabbildung $\mu: \overline{Y} \to Y$

b) es gibt eine zusammenhängende Abbildung $\overline{\varphi}: X \to \overline{Y}$ von X auf $\overline{Y}$ mit $\varphi = \mu \circ \overline{\varphi}$.

Der Raum $\overline{Y}$ sowie die Abbildungen $\overline{\varphi}$ und μ sind bis auf Äquivalenz durch a) und b) eindeutig bestimmt. Falls Y projektiv - algebraisch ist, so auch $\overline{Y}$.

2.5 Zusammensetzung.- Es sei X eine zusammenhängende komplexe Mannigfaltigkeit und $\varphi: X \to Y$ eine eigentliche holomorphe Abbildung auf einen komplexen Raum Y. Nach obigem kann man φ faktorisieren



Dabei sind $\overline{Y_n}$ und $\overline{\varphi_n}$ eindeutig bestimmt durch

a) $\overline{Y_n}$ ist normal

b) es gibt eine holomorphe Abbildung λ: $\overline{Y_n} \to Y$ auf Y, deren Fasern alle endlich sind

c) $\overline{\varphi_n}$ ist zusammenhängend und surjektiv.

Definition: Es sei φ: $X \to Y$ eine eigentliche holomorphe Abbildung der zusammenhängenden komplexen Mannigfaltigkeit X auf einen komplexen Raum Y. Dann soll $\widetilde{\varphi}$ die durch a) bis c) eindeutig bestimmte zusammenhängende Abbildung von X auf den normalen komplexen Raum $\widetilde{\varphi}X = \overline{Y_n}$ bedeuten.

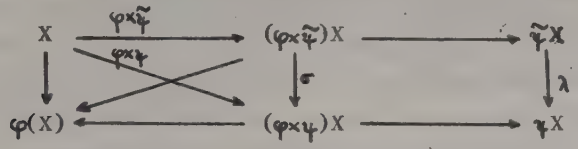
Wie eben ist $\widetilde{\varphi}X$ projektiv-algebraisch, falls φX es ist.

2.6 Rechenregeln.- Wir werden später benötigen:

2.6.1) Es seien φ und ψ eigentliche holomorphe Abbildungen der zusammenhängenden komplexen Mannigfaltigkeit X. Ist φ zusammenhängend und φX normal, so ist bis auf Äquivalenz:

$$\widetilde{\varphi\times\psi} = \widetilde{\varphi\times\widetilde{\psi}}$$

Beweis: Ordnet man jedem Punkt $(\varphi x, \widetilde{\psi}x) \in (\varphi\times\widetilde{\psi})X$ den Punkt $(\varphi x, \psi x) \in (\varphi\times\psi)X$ zu, so erhält man eine holomorphe Abbildung σ: $(\varphi\times\widetilde{\psi})X \to (\varphi\times\psi)X$, die das Diagramm



kommutativ macht. Wenn man zeigen kann, daß σ endlich ist, so folgt aus der Eindeutigkeit in 2.5, daß $\widetilde{\varphi\times\widetilde{\psi}}$ und $\widetilde{\varphi\times\psi}$ äquivalent sind. Man wähle deshalb einen festen Punkt $(y_1,y_2) \in (\varphi\times\psi)X$, etwa $y_1=\varphi x$, $y_2=\psi x$ mit $x \in X$. Ein Punkt $(z_1,z_2) = (\varphi x', \widetilde{\psi}x') \in (\varphi\times\widetilde{\psi})X$ ist σ- Urbild von (y_1,y_2) genau dann, wenn $z_1=y_1$ und $\lambda z_2 = y_2$. Aus der Endlichkeit der Abbildung λ folgt somit die Endlichkeit von σ.

2.6.2) Es seien X_1 und X_2 zusammenhängende komplexe Mannigfaltigkeiten und f: $X_1 \to X_2$ holomorph und eigentlich. Ist φ eine eigentliche holomorphe Abbildung von X_2, so gilt bis auf Äquivalenz:

$$\widetilde{\varphi\circ f} = \widetilde{\widetilde{\varphi}\circ f}$$

Beweis: Es seien $\varphi = \lambda\circ\tilde{\varphi}$ und $\tilde{\varphi}\circ f = \lambda'\circ\widetilde{\tilde{\varphi}\circ f}$ die Faktorisierungen gemäß 2.5. Dann hat man

$$\varphi\circ f = (\lambda\circ\lambda')\circ\widetilde{\tilde{\varphi}\circ f},$$

wo $\widetilde{\tilde{\varphi}\circ f}\, X_1$ normal ist, $\lambda\circ\lambda' : \widetilde{\tilde{\varphi}\circ f}\, X_1 \to (\varphi\circ f)X_1$ endlich und $\widetilde{\tilde{\varphi}\circ f} : X_1 \to \widetilde{\tilde{\varphi}\circ f}\, X_1$ zusammenhängend und surjektiv ist. Aus der Eindeutigkeit folgt dann die Behauptung.

§ 3 Pseudokonkavität

3.1 Definition pseudokonkaver komplexer Räume nach ANDREOTTI [2].- Ist U ein komplexer Raum und $V \subset U$ eine Teilmenge, so bezeichnet man als holomorph-konvexe Hülle von V in U die Menge

$$\hat{V}_U := \left\{ x \in U : |f(x)| \leq \sup_{y\in V} |f(y)| \text{ für alle } f \in H(U) \right\}.$$

$H(U)$ ist dabei die Menge der auf U holomorphen Funktionen. Ist X ein komplexer Raum und $Y \subset\subset X$ eine offene Teilmenge, so heißt der Rand ∂Y pseudokonkav in einem Punkt $y_0 \in \partial Y$, wenn y_0 eine Umgebungsbasis $\{U_\iota\}$ in X besitzt, derart, daß y_0 innerer Punkt der Menge $(\widehat{U_\iota \cap Y})_{U_\iota}$ ist für jedes ι.

Definition: Der komplexe Raum X heißt pseudokonkav, wenn eine offene relativkompakte Teilmenge $Y \subset\subset X$ existiert, die jede irreduzible Komponente von X schneidet und deren Rand ∂Y pseudokonkav in jedem Punkte $y_0 \in \partial Y$ ist.

Jeder kompakte komplexe Raum ist pseudokonkav. Gewisse Eigenschaften kompakter Räume kann man auf pseudokonkave Räume verallgemeinern:

3.2 Eigenschaften pseudokonkaver Räume.- In [2] beweist ANDREOTTI das

Théorème de finitude: Für jeden lokal irreduziblen pseudokonkaven komplexen Raum X und jede torsionsfreie kohärente analytische Garbe $\mathcal{F}$ über X gilt

$$\dim_{\mathbb{C}} \Gamma(\ ,\mathcal{F}) < \infty$$

wählt man als $\mathcal{F}$ speziell die Strukturgarbe $\mathcal{O}$, so erhält man: Die $\mathbb{C}$-Algebra der holomorphen Funktionen über einem lokal irreduziblen pseudokonkaven Raum X ist endlichdimensional. Ist X zusätzlich irreduzibel, so muß $\Gamma(X,\mathcal{O})$ nullteilerfrei sein, und nach bekannten Sätzen folgt

$$\Gamma(X,\mathcal{O}) = \mathbb{C}.$$

Jede holomorphe Funktion auf einem pseudokonkaven irreduziblen und lokal irreduziblen komplexen Raum ist konstant.

Daraus ergibt sich insbesondere, daß jede holomorphe Abbildung eines derartigen komplexen Raums in einen komplexen Zahlenraum konstant ist. Dies ermöglicht stark einschränkende Aussagen über die Existenz dimensionserniedrigender holomorpher Abbildungen.

Indem ANDREOTTI einen entsprechenden Beweis von SIEGEL für kompakte komplexe Mannigfaltigkeiten verallgemeinert, erhält er in [2] weiter das

Theorem: Es sei X ein normaler irreduzibler pseudokonkaver komplexer Raum. Dann ist der Körper der meromorphen Funktionen auf X isomorph zu einer einfachen algebraischen Erweiterung eines Körpers von rationalen Funktionen in d Unbestimmten, $d \leq \dim_{\mathbb{C}} X$.

Als Anwendung findet sich in [2] das interessante

Theorem: Es sei X ein irreduzibler pseudokonkaver komplexer Raum und $\iota: X \to \mathbb{P}^n$ eine injektive holomorphe Abbildung. Dann ist ιX enthalten in einer mit X gleichdimensionalen irreduziblen algebraischen Teilmenge des $\mathbb{P}^n$.

3.3 Hinreichende Bedingungen für Pseudokonkavität.- Es sei $U \subset \mathbb{C}^n$ offen. Einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion $f: U \to \mathbf{R}$ ordnet man ihre Levi-Form

$$L_f(z): \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \ni (u,v) \to \sum_{\mu,\nu} \frac{\partial^2 f}{\partial z_\mu \partial \bar{z}_\nu}(z)\, u_\mu \bar{v}_\nu, \quad z \in U,$$

zu. f heißt streng α-pseudokonvex (für $\alpha = 1,..,n$), wenn für alle $z \in U$ die Levi-Form mindestens $n-\alpha+1$ Eigenwerte größer als Null besitzt. Wie man Prop. 10 aus [2] entnimmt,

gelten die Implikationen

$$(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$$

für folgende Aussagen:

Y sei eine offene relativkompakte Teilmenge des irreduziblen komplexen Raums X. Weiter sei $x_0 \in \partial Y$ und U eine Umgebung von x_0 in X. Es gelte $\dim X \geq d \geq 2$.

(i) Es gibt eine Einbettung $U \hookrightarrow \mathbb{C}^n$ und einen affinen $\mathbb{C}$-Unterraum $E \subset \mathbb{C}^n$ der Dimension $\dim E \geq n-d+2$ mit $x_0 \in E$, sowie eine Umgebung V von x_0 in E und eine streng 1-pseudokonvexe Funktion f auf V mit

$$f(x_0)=0 \quad \text{und} \quad Y \cap V = \{x \in X \cap V : f(x) > 0\}.$$

(ii) Es gibt eine injektive holomorphe Abbildung $\iota: U \to \mathbb{C}^n$ und eine in einer Umgebung von $\iota(x_0)$ analytische Menge A mit

$$\dim_{\iota(x_0)} A + \dim X \geq n$$

und $A - \{\iota(x_0)\} \subset \iota(Y \cap U)$.

(iii) ∂Y ist pseudokonkav in x_0.

Hieran kann man folgende Bemerkung schließen: Es sei $Y \subset\subset X$ eine offene Teilmenge des irreduziblen komplexen Raums X. Da die Normalisierungsabbildung $\nu: X_n \to X$ eigentlich ist, (vgl. [8]), ist

$$\overline{\nu^{-1}(Y)} \subset \nu^{-1}(\bar{Y})$$

kompakt. Deswegen liegt die offene Menge $\nu^{-1}(Y)$ relativkompakt in X_n. Ist (ii) in jedem Randpunkt $y_0 \in \partial Y$ erfüllt, so auch in jedem Randpunkt $y_0' \in \partial \nu^{-1}(Y)$ für die offene Menge $\nu^{-1}(Y)$. Es folgt also:

Erfüllt $Y \subset\subset X$ in jedem Randpunkt die Eigenschaft (ii), so ist die Normalisierung X_n des irreduziblen komplexen Raums X wieder pseudokonkav.

3.4 Ein Beispiel.- In $\mathbb{P}^n$ seien homogene Koordinaten $z_0, \ldots, z_n$ eingeführt und $H \subset \mathbb{P}^n$ die Hyperebene $\{z_0 = 0\}$. Die Funktion $f(z) := \sum_1^n |z_\nu / z_0|^2$ ist auf $\mathbb{P}^n - H$ streng 1-pseudokonvex. Das System

$$\{V_c\} := \{z \in P^n : f(z) > c\}\ ,\ 0 < c \in \mathbb{R},$$

bildet eine offene Umgebungsbasis von H in P^n. Ist nun U eine beliebige zusammenhängende Umgebung von H in P^n, so gibt es ein c mit $V_c \subset\subset V$. Aus 3.3 (i) folgt:

Jede zusammenhängende Umgebung von H ist pseudokonkav.

Als Folgerung erhält man hieraus insbesondere: Jede holomorphe Funktion auf einer zusammenhängenden Umgebung von H ist konstant. Dies sieht man auf einfache Weise auch direkt. Es gilt sogar allgemeiner (vgl. [16]): Jede holomorphe Funktion auf einer zusammenhängenden Umgebung einer nichtdiskreten algebraischen Teilmenge eines P^n ist konstant. Entsprechende Aussagen werden in [16] auch für andere homogene komplexe Mannigfaltigkeiten als die komplex-projektiven Räume bewiesen. Es stellt sich die Frage: In welchen Fällen sind derartige Umgebungen pseudokonkav? Welche Aussagen über holomorphe Abbildungen gewinnt man daraus? Was kann man über meromorphe Funktionen aussagen?

§ 4 Komplexe Lie-Gruppen und homogene Mannigfaltigkeiten

4.1 Komplexe Lie-Gruppen.- Unter einer Lie-Gruppe soll stets eine komplexe Lie-Gruppe verstanden werden; d.h., G ist Lie-Gruppe, falls gilt:

i) G ist komplexe Mannigfaltigkeit.
ii) Es gibt eine Operation $G \times G \to G$, die die üblichen Rechenregeln für Gruppen erfüllt.
iii) Die Abbildung $G \times G \ni (\sigma,\tau) \to \sigma \circ \tau^{-1} \in G$ ist holomorph.

Ist H eine weitere Lie-Gruppe, so heißt eine Abbildung $\varphi: H \to G$ Homomorphismus von Lie-Gruppen, falls φ holomorph ist und außerdem ein Gruppenhomomorphismus. Eine Untergruppe H der Lie-Gruppe G ist ein injektiver Lie-Gruppenhomomorphismus $\varphi: H \to G$. Eine einparametrige Untergruppe von G ist eine zusammenhängende Untergruppe der komplexen Dimension 1. Eine lokale einparametrige Untergruppe von G ist eine injektive holomorphe Abbildung $\varphi: W \to G$ einer zusammenhängenden Umgebung W von $0 \in \mathbb{C}$ mit $\varphi(v+w) = \varphi(v) \circ \varphi(w)$ für $v,w,v+w \in W$.

4.2 Die zugehörige Lie-Algebra.- Der Tangentialraum $T(\mathfrak{E},G)$ an die Gruppe G im Einselement $\mathfrak{E}$ kann mit der Struktur einer Lieschen $\mathbb{C}$-Algebra versehen werden. Diese $\mathbb{C}$-Algebra $\mathfrak{g}$ heißt Lie-Algebra der Gruppe G. Jeder Lie-Gruppenhomomorphismus $\varphi: H \to G$ bestimmt eindeutig einen Lie-Algebrahomomorphismus $d\varphi: \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$ und falls H einfach zusammenhängend ist auch umgekehrt. Wichtig ist, daß auf diese Weise die Lie-Untergruppen $H \hookrightarrow G$ eineindeutig den Lie-Unteralgebren $\mathfrak{h} \hookrightarrow \mathfrak{g}$ entsprechen. Beweise dafür s. [19].

Die Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ trägt als endlichdimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum in natürlicher Weise eine komplexe Struktur. Die Exponentialabbildung $\exp: \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ läßt sich verallgemeinern zu einer Abbildung

$$\exp: \mathfrak{g} \to G$$

mit:

i) exp ist holomorph.

ii) exp ist biholomorph im Nullpunkt $0 \in \mathfrak{g}$.

iii) Für jeden Lie-Gruppenhomomorphismus $\varphi: H \to G$ ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{h} & \xrightarrow{d\varphi} & \mathfrak{g} \\ {\scriptstyle \exp}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \exp} \\ H & \xrightarrow{\varphi} & G \end{array}$$

kommutativ.

iv) Im Falle $G = \mathbb{C}^*$ und $\mathfrak{g} = \mathbb{C}$ ist exp die übliche Exponentialabbildung.

Speziell wird also für jede Lie-Untergruppe $H \hookrightarrow G$ eine Umgebung von $0 \in \mathfrak{h}$ biholomorph auf ein Umgebung von $\varepsilon \in H$ abgebildet. Für jeden eindimensionalen $\mathbb{C}$-Untervektorraum $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$ ist

$$\exp(t_1 - t_2) = \exp t_1 \circ (\exp t_2)^{-1}, \quad t_1, t_2 \in \mathfrak{k}.$$

Insbesondere ist $\exp 0 = \varepsilon$.

Jetzt sei $U \subset \mathfrak{g}$ eine Umgebung der 0, auf welcher die Exponentialabbildung biholomorph ist. Sind $x_1, \ldots, x_n$ komplexe kartesische Koordinaten in $\mathfrak{g}$, so kann man durch

$$y_\nu(\exp t) := x_\nu(t) \quad \text{für } t \in U$$

komplexe Koordinaten auf $\exp U$ einführen. Sie heißen kanonische Koordinaten.

4.3 Homogene Mannigfaltigkeiten.- Eine komplexe Mannigfaltigkeit X heißt homogen, wenn die Gruppe $\mathrm{Aut}(X)$ der holomorphen Automorphismen von X transitiv auf X operiert. Falls X kompakt ist, ist $\mathrm{Aut}(X)$ eine komplexe Lie-Gruppe, und die Wirkungsabbildung $\alpha\colon \mathrm{Aut}(X)\times X \ni (\sigma,x) \to \sigma(x) \in X$ ist holomorph. Für jeden Punkt $x \in X$ ist die Isotropiegruppe

$$I_x := \{\sigma \in \mathrm{Aut}(X) : \sigma(x) = x\}$$

eine abgeschlossene Untergruppe von $\mathrm{Aut}(X)$.

Ist umgekehrt G eine beliebige Lie-Gruppe und $I \subset G$ eine abgeschlossene Untergruppe, so trägt die Menge G/I der Links-Nebenklassen von I in G in natürlicher Weise eine komplexe Struktur. G wirkt als transitive Transformationsgruppe auf G/I und die Wirkungsabbildung ist holomorph. G ist ein holomorphes Faserbündel über G/I mit Faser und Strukturgruppe I. Alle Projektionen $\tau_x\colon G \ni \sigma \to \sigma(x) \in G/I$, $x \in G/I$, sind offen.

4.4 Natürliche Faserungen kompakter homogener Mannigfaltigkeiten.- Jede holomorphe Abbildung $G/I \to G/H$, wo $H \supset I$ eine abgeschlossene Lie-Untergruppe von G ist, heißt eine natürliche Faserung von G/I. In [16] wird folgender Satz bewiesen:

Jede zusammenhängende holomorphe Abbildung der kompakten homogenen komplexen Mannigfaltigkeit $X = G/I$ auf einen normalen komplexen Raum ist äquivalent zu einer natürlichen Faserung $G/I \to G/H$.

Jede zusammenhängende analytische Menge A in einer kompakten homogenen komplexen Mannigfaltigkeit X bestimmt eindeutig eine natürliche Faserung τ_A von X durch

i) $\tau_A(A)$ ist einpunktig.

ii) Jede holomorphe Abbildung von X, die A auf einen einzigen Punkt abbildet, läßt sich über τ_A faktorisieren.

Die Menge $A^* := \tau_A^{-1}(\tau_A A)$ heiße die natürliche Faser durch A in X.

II
ABBILDUNGSTHEORIE

§ 5 Eine Halbgruppe von Abbildungen

5.1 Definition der Halbgruppe P(X).- Es sei X eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit. Dann ist jede holomorphe Abbildung φ von X eigentlich, und $\widetilde{\varphi}$ gemäß 2.5 stets definiert.

Die Elemente der Menge P(X) seien alle Äquivalenzklassen von zusammenhängenden holomorphen Abbildungen $\varphi\colon X \to \varphi(X)$ von X auf einen normalen projektiv-algebraischen Raum φX. Da die Äquivalenzklassen derartiger Abbildungen bereits durch die zugehörige Zerlegung von X eindeutig bestimmt sind, ist P(X) tatsächlich eine Menge.

Sind φ_1 und φ_2 Abbildungen aus P(X), so ist $(\varphi_1 \times \varphi_2)X$ als Unterraum von $\varphi_1 X \times \varphi_2 X$ wieder projektiv-algebraisch. Im allgemeinen ist $\varphi_1 \times \varphi_2$ nicht zusammenhängend und der Raum $(\varphi_1 \times \varphi_2)X$ auch nicht normal (Gegenbeispiel hierfür s. 5.3). Als Halbgruppenoperation nehmen wir deshalb

$$\varphi_1, \varphi_2 \longrightarrow \widetilde{\varphi_1 \times \varphi_2} \in P(X).$$

Nun ist nachzuweisen, daß diese Operation assoziativ ist, d.h., für je drei Abbildungen $\varphi, \psi, \chi \in P(X)$ muß gelten

$$\widetilde{\widetilde{\varphi \times \psi} \times \chi} = \widetilde{\varphi \times \widetilde{\psi \times \chi}}$$

Dies folgt aber nach zweimaliger Anwendung der Rechenregel 2.6.1 :

$$\widetilde{\widetilde{\varphi \times \psi} \times \chi} = \widetilde{(\varphi \times \psi) \times \chi} = \widetilde{\varphi \times (\psi \times \chi)} = \widetilde{\varphi \times \widetilde{\psi \times \chi}}$$

Ein neutrales Element bezüglich dieser Operation ist die konstante Abbildung. Trivial ist, daß die Operation kommutativ ist, und daß keine Kürzungsregel gilt.

5.2 Funktorielle Eigenschaften.- Die Zuordnung

$$P:\ X \longrightarrow P(X)$$

ist ein kontravarianter Funktor von der Kategorie der kompakten komplexen Mannigfaltigkeiten in die Kategorie der abelschen Halbgruppen. Der Beweis ist einfach mit den Rechenregeln 2.6.1 und 2.6.2 :

Es seien X_1 und X_2 kompakte komplexe Mannigfaltigkeiten und $f: X_1 \to X_2$ holomorph. Durch $P(X_2) \ni \varphi \to \widetilde{\varphi \circ f} \in P(X_1)$ wird eine Abbildung $P(f): P(X_2) \longrightarrow P(X_1)$ definiert. Wegen

$$\widetilde{(\varphi \times \psi) \circ f} = \widetilde{(\varphi \circ f) \times (\psi \circ f)} = \widetilde{\varphi \circ f} \times \widetilde{\psi \circ f} \qquad (2.6.1)$$

ist $P(f)$ ein Halbgruppenhomomorphismus. $P(id)$ ist die Identität. Ist $g: X_2 \to X_3$ eine weitere holomorphe Abbildung, so gilt für alle $\varphi \in P(X_3)$ wegen (2.6.2)

$$P(g \circ f)(\varphi) = \widetilde{\varphi \circ g \circ f} = \widetilde{\widetilde{\varphi \circ g} \circ f} = (P(f) \circ P(g))(\varphi),$$

und somit wird $P(g \circ f) = P(f) \circ P(g)$.

5.3 Ein Gegenbeispiel.- Zur Konstruktion dieses Beispiels bedienen wir uns u.a. einer Methode, die genauer erst im § 6 analysiert wird. Es seien $p_1, \ldots, p_4$ vier Punkte des P^2, von denen keine drei auf einer Geraden liegen. $Q \subset P^2$ sei eine Quadrik, die diese Punkte enthält. Der Vektorraum

$$V := \left\{ s \in \Gamma(P^2, [Q]) :\ s(p_1) = \ldots = s(p_4) = 0 \right\}$$

hat die Dimension 2. Ist $\sigma': X' \longrightarrow P^2$ der σ-Prozeß in $p_1, \ldots, p_4$, so gibt es (vgl. etwa [13]) eine holomorphe Abbildung $\varphi': X' \to P^1$, deren Fasern durch σ' alle biholomorph auf die Kurven zweiten Grades $N(s)$, $s \in V$, abgebildet werden und deswegen zusammenhängen. Also gehört φ' zu $P(X')$.

Weiter sei $G' \subset P^2$ eine Gerade, die keinen der Punkte $p_1, \ldots, p_4$ enthält, und die Q in den Punkten q_1 und q_2 schneidet. $\sigma: X \to X'$ sei der σ-Prozeß in den Punkten $(\sigma')^{-1}(q_1)$ und $(\sigma')^{-1}(q_2)$ und $\tau := \sigma' \circ \sigma: X \to P^2$. Ist $G \subset \tau^{-1}(G')$ die irreduzible Komponente, die durch τ biholomorph auf G' abgebildet wird, so gibt es bekanntlich eine Modifikation $\varphi_1: X \to P^1 \times P^1$, die jede der Mengen $\tau^{-1}(p_1), \ldots, \tau^{-1}(p_4)$ und G auf einen Punkt abbildet, sonst aber biholomorph ist. $\varphi_2: X \to P^1$ sei die Abbildung $\varphi' \circ \sigma$. Offensichtlich gehören φ_1 und φ_2 zu

$P(X)$. Die Abbildung $\varphi_1 \times \varphi_2 \colon X \to P^1 \times P^1 \times P^1$ ist auf $X - G$ biholomorph, auf G jedoch nicht injektiv. Deswegen ist $\varphi_1 \times \varphi_2$ nicht zusammenhängend und $(\varphi_1 \times \varphi_2)X \subset P^1 \times P^1 \times P^1$ nicht normal.

§ 6 Linearsysteme ohne Basispunkte

6.1 Linearsysteme.- Es sei X ein beliebiger komplexer Raum. Ein Linearsystem über X ist der Projektive Raum $\operatorname{Proj} V$, der zu einem endlichdimensionalen Untervektorraum V des Vektorraums $\Gamma(X,F)$ der holomorphen Schnitte in einem Geradenbündel F über X gehört. Ist $\Gamma(X,F)$ endlichdimensional (etwa, wenn X kompakt ist), so heißt

$$|F| := \operatorname{Proj}. \Gamma(X,F)$$

ein vollständiges Linearsystem. Ein Punkt $x \in X$ heißt Basispunkt des Linearsystems $\operatorname{Proj} V$, wenn alle Schnitte $s \in V$ in x verschwinden. Die Bedeutung der Linearsysteme ergibt sich aus dem einfachen

Satz (vgl. A. WEIL [21]): a) Ist $\operatorname{Proj} V$, $V \subset \Gamma(X,F)$ ein Linearsystem ohne Basispunkte und $s_0,\dots,s_k$ eine Basis von V, so wird durch

$$\sigma_V \colon X \ni x \longrightarrow (s_0(x),\dots,s_k(x)) \in P^k$$

eine holomorphe Abbildung $\sigma_V \colon X \to P^k$ definiert. Die Äquivalenzklasse der Abbildung $\sigma_V \colon X \to \sigma_V X$ hängt nicht von der Auswahl der Basis ab.

b) Ist umgekehrt $\sigma \colon X \to P^k$ holomorph, so gibt es einen Untervektorraum $V \subset \Gamma(X, \sigma^*[P^{k-1}])$ ohne Basispunkte mit $\sigma_V = \sigma$.

Das zur Hyperebenen $P^{k-1} \subset P^k$ assoziierte Bündel $[P^{k-1}]$ über P^k soll im Folgenden mit H_k bezeichnet werden.

Die Nullstellenmenge $N(s) \subset X$ eines Schnittes $s = \sum_0^k \lambda_\varkappa s_\varkappa \in V$ ist gerade das σ_V-Urbild der Hyperebene $\sum \lambda_\varkappa z_\varkappa = 0$ des P^k. Da jeder Punkt $y \in \sigma_V X$ gerade der Durchschnitt aller Hyperebenen durch diesen Punkt ist, folgt für die σ_V-Fasern:

$$\sigma_V^{-1}(\sigma_V x) = \bigcap \{ N(s) \colon s \in V,\ s(x) = 0 \}.$$

Ist $|F|$ ein vollständiges Linearsystem ohne Basispunkte, so hängt die Abbildung $\sigma_F := \sigma_{\Gamma(X,F)}$ nur vom Geradenbündel F ab.- Als nächstes zeigen wir, daß für eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit X alle Abbildungen aus P(X) durch vollständige Linearsysteme gegeben werden können. Dazu dient

6.2 Satz: Gegeben sei eine zusammenhängende holomorphe Abbildung φ des kompakten normalen komplexen Raums X auf den normalen komplexen Raum Y. Dann ist für jedes Geradenbündel F über Y der Vektorraumhomomorphismus

$$\varphi^*: \Gamma(Y,F) \ni t \longrightarrow t\circ\varphi \in \Gamma(X, \varphi^*F)$$

surjektiv. (φ^* ist trivialerweise injektiv.)

Beweis: Man wählt eine Überdeckung $\{U_i\}$ von Y und einen Cozyklus $c_{ij}: U_i \cap U_j \to \mathbb{C}^*$, der das Bündel F definiert. Bezüglich der Überdeckung $\{V_i\}$, $V_i := \varphi^{-1}(U_i)$, wird dann das Bündel φ^*F durch den Cozyklus $c_{ij}\circ\varphi: V_i \cap V_j \to \mathbb{C}^*$ gegeben. Ein beliebiger Schnitt $s \in \Gamma(X,\varphi^*F)$ bestimmt holomorphe Funktionen $s_i: V_i \to \mathbb{C}$ mit

$$s_i = s_j \cdot (c_{ij}\circ\varphi) \mid V_i \cap V_j.$$

Weil V_i aus lauter zusammenhängenden und kompakten φ-Fasern besteht, und s_i auf jeder φ-Faser konstant ist, gibt es (zunächst weder holomorphe noch stetige) Abbildungen $t_i: U_i \to \mathbb{C}$ mit $t_i\circ\varphi = s_i \mid V_i$ und

$$t_i\circ\varphi = s_i = s_j\cdot(c_{ij}\varphi) = (t_j\circ\varphi)(c_{ij}\circ\varphi) = (t_{ij}c_{ij})\circ\varphi|V_i\cap V_j.$$

Da φ surjektiv ist, folgt $t_i = t_j \cdot c_{ij} \mid U_i \cap U_j$, und die t_i konstituieren daher eine Abbildung $t: Y \to F$ mit $s = t\circ\varphi$. Da φ surjektiv und eigentlich, und außerdem Y normal ist, folgt aus 2.1, daß t holomorph ist. Es existiert also ein holomorpher Schnitt $t \in \Gamma(Y,F)$ mit $s = \varphi^*t$, w.z.b.w.

6.3 Folgerung.- Es sei $\iota: Y \to \mathbb{P}^k$ eine Einbettung des projektiv-algebraischen Raums Y. Nach Satz 6.1 b) gibt es einen Untervektorraum

$$V \subset \Gamma(Y, \iota^*H_k) \text{ mit } \iota = \sigma_V.$$

Da σ_V injektiv ist, muß auch $\sigma_{\iota^*H_k}$ injektiv sein. Weil

man σ_V über $\sigma_{\zeta^*H_k}$ faktorisieren kann, muß $\sigma'_{\zeta^*H_k}: Y \longrightarrow \sigma_{\zeta^*H_k} Y$ biholomorph sein, also zur identischen Abbildung äquivalent.

Es sei nun X eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit, $\varphi \in P(X)$ und $Y = \varphi(X)$. Nach 6.2 ist

$$\varphi^*: \Gamma(Y, \zeta^*H_k) \supset t \longrightarrow t \circ \varphi \in \Gamma(X, \varphi^*\zeta^*H_k)$$

bijektiv. Es folgt, daß die vom vollständigen Linearsystem $|\varphi^*\zeta^*H_k|$ auf X definierte Abbildung

$$\sigma_{\varphi^*\zeta^*H_k} = \sigma_{\zeta^*H_k} \circ \varphi$$

ist. Sie repräsentiert also das gleiche Element von P(X) wie φ. Man hat den

Satz: Ist X eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit, so wird jede Abbildung $\varphi \in P(X)$ gegeben durch ein vollständiges Linearsystem $|F|$, das zu einem Bündel F auf X gehört: $\varphi = \sigma_F$.

6.4 Ein Halbgruppenepimorphismus.- Es sei X ein beliebiger komplexer Raum. Die Isomorphieklassen der holomorphen Geradenbündel über X bilden eine abelsche Gruppe mit dem Tensorprodukt als Operation. Für je zwei Geradenbündel F und G über X hat man einen $\mathbb{C}$-Homomorphismus

$$\alpha: \Gamma(X,F) \otimes \Gamma(X,G) \longrightarrow \Gamma(X, F \otimes G).$$

Ist $\{U_i\}$ eine Überdeckung von X, so, daß über jedem U_i die Bündel F und G trivial sind, dann beschreibt sich dieser Homomorphismus wie folgt:

Schnitte $s \in \Gamma(X,F)$ und $t \in \Gamma(X,G)$ werden über U_i als holomorphe Funktionen $s_i, t_i: U_i \to \mathbb{C}$ gegeben. $\alpha(s \otimes t)$ ist dann der Schnitt in $F \otimes G$, der über U_i als Produkt

$$(\alpha(s \otimes t))_i = s_i \cdot t_i$$

gegeben wird.

Hieraus ersieht man sofort: Ein Punkt $x \in X$ ist nur dann Basispunkt von $|F \otimes G|$, wenn er entweder Basispunkt von $|F|$ oder von $|G|$ ist. Anders ausgedrückt: Die Isomorphieklassen der Geradenbündel ohne Basispunkte bilden eine Unterhalbgruppe G(X) in der Gruppe der Isomorphieklassen aller Geradenbündel. Da die Gruppe aller Geradenbündel funktoriell ist, ist auch G ein (kontravarianter) Funktor mit Werten in der Kategorie der abelschen Halbgruppen. Man muß dazu nur noch

bemerken, daß mit F auch φ^*F keine Basispunkte besitzt.

Von nun an sei X eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit. Jedes Geradenbündel $F \in G(X)$ bestimmt eine (nur von der Isomorphieklasse von F abhängige) holomorphe Abbildung σ_F auf einen projektiv-algebraischen Raum. Im allgemeinen ist weder σ_F zusammenhängend, noch $\sigma_F X$ normal. Man faktorisiere deshalb gemäß 2.5

$$\sigma_F = \lambda_F \circ \tilde{\sigma}_F$$

und setze $\varepsilon(F) := \tilde{\sigma}_F \in P(X)$. Man erhält dadurch eine Abbildung

$$\varepsilon: G(X) \longrightarrow P(X),$$

die wegen 6.3 surjektiv ist.

Daß ε auch additiv - und somit ein Halbgruppenepimorphismus - ist, ergibt sich aus den folgenden Hilfssätzen:

6.5 Hilfssatz: Es seien F und G zwei Geradenbündel über X ohne Basispunkte. Dann gibt es einen Unterraum $V \subset \Gamma(X, F \otimes G)$ so, daß das Linearsystem Proj V keine Basispunkte hat, und gilt:

$$\sigma_F \times \sigma_G = \sigma_V.$$

Beweis: Sind $s_0,\dots,s_k$, bzw. $t_0,\dots,t_l$ eine Basis von $\Gamma(X,F)$, bzw. von $\Gamma(X,G)$, so kann man schreiben

$$\sigma_F: X \ni x \longrightarrow (s_0(x),\dots,s_k(x)) \in P^k$$
$$\sigma_G: X \ni x \longrightarrow (t_0(x),\dots,t_k(x)) \in P^l.$$

Bezeichnet man mit $\sigma: P^k \times P^l \to P^{(k+1)(l+1)-1}$ die Segre-Einbettung

$$\sigma: (x_0,..,x_k),(y_0,..,y_l) \to (x_0y_0,x_0y_1,..,x_ky_l),$$

so ist die Produktabbildung $\sigma_F \times \sigma_G$ äquivalent zur Abbildung $\sigma \circ (\sigma_F \times \sigma_G)$. Letztere aber wird beschrieben durch

$$x \to (s_0(x)\cdot t_0(x), \dots, s_k(x)\cdot t_l(x)).$$

Die Schnitte $s_\varkappa t_\lambda$, $0 \leq \varkappa \leq k$, $0 \leq \lambda \leq l$, erzeugen den Untervektorraum

$$V := \alpha(\Gamma(X,F) \otimes \Gamma(X,G)) \in \Gamma(X, F \otimes G).$$

Es sei nun $v_0,\dots,v_m$ eine Basis von V und

$$s_\varkappa t_\lambda = \sum_\mu c^\mu_{\varkappa\lambda} v_\mu, \quad 0 \leq \varkappa \leq k, \ 0 \leq \lambda \leq l.$$

Der Rang der $(m+1, (k+1)(l+1))$ - Matrix $(c^\mu_{\varkappa\lambda})$ ist $m+1$,

und durch $(z_0,\dots,z_m) \longrightarrow (\sum_\mu c^\mu_{\varkappa\lambda} z_\mu)$ wird also eine Einbettung $\gamma\colon P^m \to P^{(k+1)(l+1)-1}$ definiert. Offensichtlich ist

$$\gamma\circ\sigma_V = \sigma\circ(\sigma_F\times\sigma_G)$$

und folglich σ_V äquivalent zu $\sigma_F\times\sigma_G$, w.z.b.w.

Durch vollständige Induktion zeigt man die analoge Behaup - tung für mehr als zwei Geradenbündel.

6.6 Hilfssatz: Es sei $F\in G(X)$ ein Geradenbündel ohne Basispunkte und $V\subset\Gamma(X,F)$ ein Untervektorraum, derart, daß das Linearsystem Proj V keine Basispunkte besitzt. Dann gilt:

1) Es gibt eine holomorphe Faktorisierung $\sigma_V = \sigma\circ\sigma_F$.
2) Die Abbildung σ ist endlich.

Bweis: 1) Eine Basis $s_0,\dots,s_k$ von V werde ergänzt zu einer Basis $s_0,\dots,s_k,s_{k+1},\dots,s_l$ von $\Gamma(X,F)$. Dann ist

$$\sigma_V\colon\ x \longrightarrow (s_0(x),\dots,s_k(x))$$
$$\sigma_F\colon\ x \longrightarrow (s_0(x),\dots,s_l(x)).$$

Nach Voraussetzung gilt für jeden Punkt $(s_0(x),\dots,s_l(x))\in\sigma_F X$

$$(s_0(x),\dots,s_k(x)) \neq (0,\dots,0).$$

Durch

$$\sigma_F X \ni y = (s_0(x),\dots,s_l(x)) \longrightarrow (s_0(x),\dots,s_k(x)) =: \sigma(y)\in\sigma_V X$$

wird also eine holomorphe Abbildung $\sigma\colon \sigma_F X \to \sigma_V X$ mit $\sigma_V = \sigma\circ\sigma_F$ definiert.

2) Zu zeigen ist, daß in jeder σ_V-Faser

$$\sigma_V^{-1}(\sigma_V x) = \bigcap \{N(s)\colon s\in V,\ s(x) = 0\}$$

nur endlich viele σ_F-Fasern

$$\sigma_F^{-1}(\sigma_F y) = \bigcap \{N(s)\colon s\in\Gamma(X,F),\ s(y) = 0\}$$

liegen. Dazu werde ein $x\in X$ festgehalten. Ist $s\in V$ ein belie - biger Schnitt, dessen Nullstellenmenge N(s) die σ_V-Faser $\sigma_V^{-1}(\sigma_V x)$ schneidet, so enthält N(s) diese Faser ganz. Nach Voraussetzung kann x kein Basispunkt von Proj V sein. Es gibt also einen Schnitt $s\in V$ mit $x\notin N(s)$. Für dieses s ist dann

$$N(s)\cap\sigma_V^{-1}(\sigma_V x) = \emptyset.$$

Für jedes weitere $t\in\Gamma(X,F)$ ist die meromorphe Funktion t/s dann auf einer ganzen Umgebung von $\sigma_V^{-1}(\sigma_V x)$ holomorph, und,

weil $\sigma_V^{-1}(\sigma_V x)$ kompakt ist, muß t/s auf jeder Zusammenhangs - komponente dieser Faser konstant sein. Falls N(t) einen Punkt $y \in \sigma_V^{-1}(\sigma_V x)$ enthält, muß es dann darum auch die ganze Zusammenhangskomponente $Z_y(\sigma_V^{-1}(\sigma_V x))$ enthalten. Da dies für alle $t \in \Gamma(X,F)$ gilt, enthält auch die σ_F-Faser durch y

$$\sigma_F^{-1}(\sigma_F y) = \bigcap \{ N(t): t \in \Gamma(X,F),\ t(y) = 0 \}$$

die ganze Zusammenhangskomponente $Z_y(\sigma_V^{-1}(\sigma_V x))$. Die Faser $\sigma_V^{-1}(\sigma_V x)$ hat aber nur endlich viele Zusammenhangskomponenten, sodaß sie auch nur endlich viele σ_F-Fasern umfassen kann.-

Folgerung: Sind X, F und $V \subset \Gamma(X,F)$ wie oben, so gilt

$$\widetilde{\sigma_F} = \widetilde{\sigma_V}.$$

Der Beweis ergibt sich aus der Eindeutigkeit in 2.5.

6.7 Zusammenfassend erhält man den

Hauptsatz: Ist X eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit, so gibt es einen Halbgruppenepimorphismus

$$\varepsilon : G(X) \longrightarrow P(X).$$

ε ist eine natürliche Transformation zwischen den Funktoren G und P.

Beweis: Aus 6.5 und 6.6 folgt

$$\varepsilon(F \otimes G) = \widetilde{\sigma_{F \otimes G}} = \widetilde{\sigma_F \times \sigma_G} = \widetilde{\sigma_F} \times \widetilde{\sigma_G} = \varepsilon(F) \times \varepsilon(G).$$

ε ist also additiv und wegen 6.3 surjektiv. Es ist noch zu zeigen, daß für jede holomorphe Abbildung $f: X \to Y$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} G(X) & \xleftarrow{f^*} & G(Y) \\ \varepsilon \downarrow & & \downarrow \varepsilon \\ P(X) & \xleftarrow{P(f)} & P(Y) \end{array}$$

kommutiert. Dazu sei $F \in G(Y)$ beliebig. Ist $V \subset \Gamma(X, f^*F)$ der geliftete Vektorraum $f^*\Gamma(Y,F)$, so gilt $\sigma_V = \sigma_F \circ f$. Wegen 6.6 ist

$$\widetilde{\sigma_V} = \widetilde{\sigma_{f^*F}} = \varepsilon(f^*F).$$

Andererseits folgt aus 2.6.2:

$$\widetilde{\sigma_V} = \widetilde{\sigma_F \circ f} = P(f)\,(\varepsilon(F)),$$

w.z.b.w.

§ 7 Über die Homologieklasse der σ_F-Fasern

7.1 Allgemeine Fasern.- Es sei $\sigma: X \to Y$ eine holomorphe Abbildung des irreduziblen kompakten komplexen Raums X. $S \subset X$ sei die abgeschlossene Hülle der Menge aller Punkte $x \in X$ mit:

entweder i) x singulärer Punkt von X
oder ii) σx singulärer Punkt von σX
oder iii) x gewöhnlicher Punkt von X, aber die (nun erklärte) Funktionalmatrix von σ hat in x nicht Maximalrang.

S ist eine echte analytische Teilmenge von X (vgl. [13], Satz 16). Für sie gilt - wie für jede andere echte analytische Teilmenge von X - der

Hilfssatz: In Y gibt es eine echte analytische Teilmenge A, deren Urbild $\bar{\sigma}^1 A$ jede σ-Faser ganz umfaßt, von welcher irgend eine irreduzible Komponente in S liegt.

Beweis: Falls $S \neq Y$ ist, ist nichts zu beweisen. Seien deshalb $S_1, \ldots, S_m$ diejenigen irreduziblen Komponenten von S, die auf ganz Y abgebildet werden. $A_\mu \subset S_\mu$ seien die Entartungsmengen der Abbildungen $\sigma|S_\mu$, $1 \leq \mu \leq m$, d.h. die Mengen

$$(S_\mu)_{\sigma|S_\mu}(d), \quad d = 1 + \dim S - \dim S$$

(siehe p. iv). Die Menge

$$A := \sigma A_1 \cup \ldots \cup \sigma A_m$$

ist dann eine mindestens 2-codimensionale analytische Teilmenge von Y. Für jeden Punkt $y \in Y-A$ besteht $\bar{\sigma}^1(y) \cap S$ nur aus nichtentarteten $\sigma|S_\mu$-Fasern; es folgt

$$\dim \bar{\sigma}^1(y) \cap S = \max_\mu \{\dim S_\mu\} - \dim Y < \dim X - \dim Y.$$

Da die Dimension jeder irreduziblen Komponente von $\bar{\sigma}^1(y)$ gerade mindestens dim X — dim Y ist, kann keine dieser Komponenten ganz in S liegen, w.z.b.w.

Eine Faser $\bar{\sigma}^1(\sigma x)$, $x \in X$, von der keine irreduzible Komponente ganz in S liegt, soll allgemeine Faser heißen. Aus dem Hilfssatz folgt, daß die Vereinigung aller allgemeinen Fasern eine offene und dichte Teilmenge von X enthält.

7.2 Zunächst werde daran erinnert, was "transversal schneiden" heißt: Sind A_1, A_2, A_3 komplexe Räume mit $A_1 \subset A_3$, $A_2 \subset A_3$ und $b \in A_1 \cap A_2$ ein gewöhnlicher Punkt von A_1, A_2 und A_3, so sagt man A_1 und A_2 schneiden sich in b transversal, wenn für die Tangentialräume gilt:

$$T(b,A_3) = T(b,A_1) + T(b,A_2).$$

Wir benötigen den Hilfssatz:

Satz: Es sei X ein irreduzibler komplexer Teilraum der kompakten komplexen Mannigfaltigkeit X'. Weiter sei σ: X→Y eine holomorphe Abbildung in eine komplexe Mannigfaltigkeit Y und S die in 7.1 erklärte analytische Teilmenge von X. Weiter sei $Z := X' \times Y$, $G \subset Z$ das durch die Inklusion $X \times Y \hookrightarrow X' \times Y$ gegebene Bild des Graphen von σ und $H \subset Y$ eine analytische Teilmenge mit:

I) In jeder irreduziblen Komponente D_μ, $1 \leq \mu \leq m$, von $\sigma^{-1}H$ liegt ein Punkt $b_\mu \in D_\mu - S$.

II) σb_μ ist gewöhnlicher Punkt von H.

III) H und σX schneiden sich in σb_μ transversal.

Dann gilt für die Schnittmultiplizitäten (zur Def. vgl. BOREL-HAEFLIGER [3]):

$$i(G.(X' \times H); jD_\mu) = 1.$$

Dabei ist j: X→G die biholomorphe Abbildung von X auf den Graph von σ.

Beweis: Es seien p_1: $X' \times Y \to X$ und p_2: $X' \times Y \to Y$ die natürlichen Projektionen. Die Punkte $j(b_\mu)$ sind nach Voraussetzung gewöhnliche Punkte von Z, von G (wegen I) und von $X' \times H$ (wegen II). Zu zeigen ist, daß sich G und $X' \times H$ in $j(b_\mu)$ transversal schneiden. Die Behauptung folgt dann aus [3].

Dazu sei b einer der Punkte b_μ. Man hat eine kanonische Zerlegung:

$$T(jb,Z) = T(jb,X' \times \{\sigma b\}) \oplus T(jb, \{b\} \times Y).$$

Nun gilt

(1) $$T(jb, X' \times \{\sigma b\}) \subset T(jb, X' \times H).$$

Weiter hat man wegen III)

$$T(\sigma b,H) + T(\sigma b,\sigma X) = T(\sigma b,Y).$$

Wegen $b \notin S$ folgt

$$T(\sigma b,\sigma X) = d\sigma(b)\, T(b,X) = (dp_2(jb) \circ dj(b))\, T(b,X) =$$
$$= dp_2(jb)\, T(jb,G).$$

Somit erhält man aus

$$dp_2(jb)\ T(jb, \{b\}\times Y) = T(\sigma b, Y) =$$
$$= T(\sigma b, H) + T(\sigma b, \sigma X) =$$
$$= dp_2(jb)\ (T(jb, X' \times H) + T(jb, G))$$

schließlich

$$T(jb, \{b\}\times Y) \subset T(jb, X' \times H) + T(jb, G) + \ker\ dp_2(jb) =$$
$$= T(jb, X' \times H) + T(jb, G) + T(jb, X' \times \{\sigma b\}) =$$
$$= T(jb, X' \times H) + T(jb, G). \qquad (2)$$

Die Inklusionen (1) und (2) zusammen ergeben

$$T(jb, Z) = T(jb, X' \times H) + T(jb, G),$$

also schneiden sich G und $X' \times H$ tatsächlich transversal im Punkte b, w.z.b.w.

Ist X = X' singularitätenfrei, so existiert der Hopfsche Umkehrhomomorphismus σ. Aus dem Hilfssatz folgt

$$\sigma\, \zeta(H) = j_*^{-1}(\, \zeta(G) \circ \zeta(X \times H)\,) = \sum_{1}^{m} \zeta(D_\mu).$$

7.3 Die charakteristische Klasse.- Es sei X ein irreduzibler komplexer Raum, F ein Geradenbündel über X ohne Basispunkte und $\sigma_F: X \to P^l$ die zugehörige Abbildung. Die Divisoren $\sigma_F^{-1} P^{l-1}$ sind für alle $P^{l-1} \subset P^l$ linear äquivalent. Aus [3] folgt, daß alle Homologieklassen $\zeta(\sigma_F^{-1} P^{l-1})$ übereinstimmen.

Definition: Die Homologieklasse $\zeta(F) := \zeta(\sigma_F^{-1} P^{l-1}) \in H^a_{2n-2}(X, Z)$ heiße charakteristische Homologieklasse des Bündels F über X.

Falls X singularitätenfrei ist, ist $\zeta(F)$ dual (via Poincaré - Dualität) zur ersten Chern - Klasse von F. Es ist ja $F = [\sigma_F^{-1} P^{l-1}]$. Für die charakteristische Klasse $\zeta(F)$ gilt der

7.4 Satz: Eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit X und ein Geradenbündel F über X ohne Basispunkte seien gegeben. Dann gilt:

a) Liegt die analytische Menge $C \subset X$ in einer σ_F-Faser, so ist $\zeta(C) \circ \zeta(F) = 0$.

b) Der Hopfsche Umkehrhomomorphismus erfüllt

$$\sigma_F\, \zeta(P^{l-1}) = \zeta(F).$$

c) Setzt man $d := \dim \sigma_F X$ und $g :=$ Grad von $\sigma_F X \subset P^l$, so gibt es g allgemeine Fasern $E_1, \ldots, E_g \subset X$ von σ_F mit

$$\zeta(F)^d = \zeta(E_1) + \ldots + \zeta(E_g).$$

d) Für eine irreduzible Kurve $C \subset X$ ist genau dann $\zeta(F) \circ \zeta(C) = 0$, wenn $\dim \sigma_F C = 0$.

Beweis: a) Wenn C in einer Faser liegt, so gibt es einen Divisor $\sigma_F^{-1} P^{l-1}$, der C nicht trifft. Es folgt

$$\zeta(C) \circ \zeta(F) = \zeta(C) \circ \zeta(\sigma_F^{-1} P^{l-1}) = 0.$$

b) Bezeichnet man mit c_1 die erste Chern - Klasse, so folgt

$$\underline{\sigma_F}\, \zeta(P^{l-1}) = \underline{\sigma_F} \Delta c_1([P^{l-1}]) = \Delta \sigma_F^* c_1([P^{l-1}]) = \Delta c_1(F) = \zeta(F).$$

c) Es sei $A \subset \sigma_F X$ wie in 7.1. Man wähle einen (l-d) - dimensionalen Unterraum $P^{l-d} \subset P^l$, der $\sigma_F X$ transversal schneidet und A nicht trifft. Dann ist $P^{l-d} \cap \sigma_F X$ gerade g-punktig und die zu diesen Punkten gehörenden σ_F-Fasern sind allgemein. Für $H := P^{l-d}$ sind I), II) und III) aus 7.2 erfüllt. Nach (H) aus 1.3 folgt

$$\begin{aligned} \underline{\sigma_F}\, \zeta(H) &= j_*^{-1}(\zeta(G) \circ \zeta(X \times H)) = \\ &= \sum_{\gamma=1}^{g} \zeta(E_\gamma) \cdot i(G.(X \times H), E_\gamma) = \\ &= \zeta(E_1) + \ldots + \zeta(E_g). \end{aligned}$$

Andererseits ist $\zeta(P^{l-d}) = \zeta(P^{l-1})^d$, und da $\underline{\sigma_F}$ ein Ringhomomorphismus ist, folgt auch

$$\underline{\sigma_F}\, \zeta(H) = \underline{\sigma_F}\, \zeta(P^{l-1})^d = \zeta(F)^d.$$

d) Zu zeigen ist, daß aus $\zeta(F) \circ \zeta(C) = 0$ folgt $\dim \sigma_F C = 0$. Da X und P^l Mannigfaltigkeiten sind, kann man die Projektionsformel

$$\begin{aligned} 0 = (\sigma_F)_* (\zeta(C) \circ \zeta(F)) &= (\sigma_F)_* (\zeta(C) \circ \underline{\sigma_F}\, \zeta(P^{l-1})) = \\ &= ((\sigma_F)_* \zeta(C)) \circ \zeta(P^{l-1}) = \gamma \cdot \zeta(\sigma_F C) \circ \zeta(P^{l-1}) \end{aligned}$$

anwenden. Falls der Abbildungsgrad γ verschwindet, so ist nach 1.2 die Dimension $\dim \sigma_F C = 0$. Im Falle $\gamma \neq 0$ muß

$$\zeta(\sigma_F C) \circ \zeta(P^{l-1}) = 0$$

sein, d.h., $\sigma_F C$ ist auch in diesem Fall eine diskrete Menge.

7.5 Folgerung für projektiv-algebraisches X.- In einer n-dimensionalen projektiv-algebraischen Mannigfaltigkeit gibt es keinen nullhomologen holomorphen Zyklus, der nicht verschwindet.

Die Dimension n-d der allgemeinen σ_F-Fasern ist dann durch

$$\zeta(F)^d = \zeta(E_1) + \ldots + \zeta(E_g) \neq 0$$

und

$$\zeta(F)^{d+1} = \zeta(F) \circ \zeta(E_1) + \ldots + \zeta(F) \circ \zeta(E_g) = 0$$

eindeutig bestimmt. Sie hängt also nur von $\zeta(F)$ ab.

7.6 Die Tensorpotenzen eines Geradenbündels $F \in G(X)$.- Bezeichnet man die ν-te Tensorpotenz des Bündels F mit F^ν, so erhält man aus 6.5 und 6.6 die

Folgerung: Für jedes Geradenbündel $F \in G(X)$ und jedes $\nu \geq 1$ ist

$$\widetilde{\sigma_F} = \widetilde{\sigma_{F^\nu}}.$$

Beweis: Setzt man in 6.5 G:= F, so erhält man den Induktionsanfang

$$\widetilde{\sigma_F} = \widetilde{\sigma_F \times \sigma_F} = \widetilde{\sigma_{F^2}}.$$

Setzt man $G := F^\nu$, $\nu \geq 1$, so erhält man aus der Induktionsannahme $\widetilde{\sigma_F} = \widetilde{\sigma_{F^\nu}}$ die Induktionsbehauptung

$$\widetilde{\sigma_F} = \widetilde{\sigma_{F^\nu} \times \sigma_F} = \widetilde{\sigma_{F^\nu} \times \sigma_F} = \widetilde{\sigma_{F^{\nu+1}}}.$$

Falls der Exponent ν genügend groß wird, ist sogar $\sigma_{F^\nu} = \widetilde{\sigma_{F^\nu}}$. Dies ergibt sich aus dem Satz:

Hilfssatz: Zu jedem Geradenbündel $F \in G(X)$ gibt es eine natürliche Zahl n mit

$$\sigma_{F^\nu} = \widetilde{\sigma_{F^\nu}} \text{ für alle } \nu \geq n.$$

Beweis: Nach 2.5 faktorisiert man $\sigma_F = \lambda \circ \widetilde{\sigma_F}$ mit endlichem λ und normalem $Y := \widetilde{\sigma_F} X$. Der Raum $\sigma_F X$ ist eingebettet in eine P^1. Ist $[P^{1-1}]$ das zur Hyperebene $P^{1-1} \subset P^1$ assoziierte Bündel über P^1, so definiert das eingeschränkte Bündel $[P^{1-1}] | \sigma_F X$ gerade die Einbettung $\sigma_F X \hookrightarrow P^1$. Da λ endlich ist, muß nach GRAUERT - REMMERT [7] auch Y projektiv-algebraisch sein, etwa $Y \subset P^k$. Es sei nun

$$Z := P^k \times P^1$$
$$G := \{(y, \lambda y) : y \in Y\} \subset Z$$
$$g: Y \ni y \longrightarrow (y, \lambda y) \in Z$$

$$p_1: P^k \times P^l \ni (s,t) \to s \in P^k$$
$$p_2: P^k \times P^l \ni (s,t) \to t \in P^l.$$

Anschließend wird gezeigt werden

i) Für jede a-dimensionale analytische Menge $A \subset G$ ist
$$\zeta (P^k \times P^{l-1})^a \circ \zeta(A) > 0.$$

ii) Es gibt Hyperebenen $P^{l-1} \subset P^l$ so, daß für jede irreduzible Komponente H_μ, $1 \leq \mu \leq m$, von $H := \lambda^{-1} P^{l-1} \subset Y$ die Schnittmultiplizitäten
$$i(P^k \times P^{l-1} \cdot G, g(H_\mu)), \quad 1 \leq \mu \leq m,$$
alle gleich 1 sind.

Der Divisor $P^k \times P^{l-1}$ auf Z erfüllt dann wegen i) den Nakai-Moisezon-Test für G. Aus KLEIMAN [11] folgt, daß das zum Divisor
$$(P^k \times P^{l-1}) \cap G = g(H) \qquad \text{(wegen ii)}$$
assoziierte Bündel über G reich ist; es gibt also eine Potenz $[g(H)]^n$ dieses Bündels, die eine Einbettung von G in einen projektiven Raum definiert. Da g biholomorph, und wegen 6.2 auch
$$\widetilde{\sigma_F}^*: \Gamma(Y, [H]^n) \to \Gamma(X, [\widetilde{\sigma_F}^* H]^n) = \Gamma(X, F^n)$$
bijektiv ist, so muß die Abbildung $\sigma_{F^n} = \sigma_{[H]^n} \circ \widetilde{\sigma_F}$ biholomorph äquivalent zu $\widetilde{\sigma_F}$ sein. Dies gilt dann natürlich auch für alle $\nu \geq n$.

Beweis von i): Da λ endlich ist, muß
$$\dim p_2 A = \dim \lambda g^{-1} A = \dim A = a$$
gelten. Der Umkehrhomomorphismus zu p_2 erfüllt trivialerweise
$$\underline{p_2}\, \zeta(P^{l-1}) = \zeta(P^k \times P^{l-1}).$$
Da Z und P^l Mannigfaltigkeiten sind, ist die Projektionsformel anwendbar und liefert

$$(p_2)_* (\zeta(P^k \times P^{l-1})^a \circ \zeta(A)) =$$
$$= (p_2)_* (\underline{p_2}\, \zeta(P^{l-1})^a \circ \zeta(A)) =$$
$$= \zeta(P^{l-1})^a \circ (p_2)_* \zeta(A) =$$
$$= \zeta(P^{l-1})^a \circ \gamma \cdot \zeta(p_2 A) > 0,$$

da $\gamma = \operatorname{grad} p_2 | A > 0$ ist. Dann muß aber auch schon $\zeta(P^k \times P^{l-1})^a \circ (A) > 0$ gewesen sein.

Beweis von ii): Es sei $S \subset G$ für $p_2 | G$ wie für σ in 7.1 erklärt. Da λ endlich ist, gilt dim $p_2 S <$ dim $p_2 G$. Für einen allgemeinen $P^{l-1} \subset P^l$ ist also

$$\dim (P^k \times P^{l-1}) \cap S < \dim (P^k \times P^{l-1}) \cap G.$$

Man wähle nun einen allgemeinen $P^{l-1} \subset P^l$ dieser Art und so, daß er $\sigma_F X = p_2 G$ in einem gewöhnlichen Punkt $y \in \sigma_F X - p_2 S$ transversal schneidet. Dann hat man folgende Situation:

I) Nach Bertini (vgl. AKIZUKI [1]) ist $P^{l-1} \cap \sigma_F X$ irreduzibel.*) Jede irreduzible Komponente H_μ von $\lambda^{-1} P^{l-1}$ wird durch λ also auf ganz $P^{l-1} \cap \sigma_F X$ abgebildet. Dann enthält H_μ einen Punkt b_μ mit $\lambda b_\mu = y$. Dann muß $b_\mu \notin g^{-1} S$ gelten.

II) Der Punkt y ist gewöhnlicher Punkt von P^{l-1}.

III) P^{l-1} und $\sigma_F X$ schneiden sich in y transversal.

Damit ist Hilfssatz 7.2 anwendbar und ergibt

$$i(G.(P^k \times P^{l-1}), gH_\mu) = 1.$$

§ 8 Spezialfall: X projektiv-algebraisch

Es wird gezeigt, daß die Abbildung $\widetilde{\sigma_F}$ in diesem Fall in Wirklichkeit nur von der charakteristischen Klasse $\zeta(F)$ abhängt. Sei also X jetzt eine zusammenhängende projektiv-algebraische Mannigfaltigkeit.

8.1 Geradenbündel mit ähnlichen charakteristischen Klassen.- Nach 7.6 ist die Abbildung $\widetilde{\sigma_{F^\nu}}$ unabhängig von der Potenz ν des Geradenbündels F. Um damit zusammenhängende Aussagen für Homologieklassen bequem zu formulieren, geben

---

*) Das gilt nur für dim $\sigma_F X \geq 2$. Der Fall dim $\sigma_F X \leq 1$ ist aber ohnehin trivial!

wir die

Definition: Y sei ein endlicher Simplizialkomplex. Zwei Homologieklassen γ und $\delta \in H_*(Y,Z)$ heißen ähnlich, genau dann, wenn ganze Zahlen $m,n>0$ existieren mit

$$m\gamma = n\delta .$$

Diese Ähnlichkeitsrelation ist eine Äquivalenzrelation in $H_*(Y,Z)$. Es gilt der

Satz: F und G seien zwei Geradenbündel über X ohne Basispunkte und mit ähnlichen charakteristischen Klassen. Dann ist

$$\widetilde{\sigma_F} = \widetilde{\sigma_G}.$$

Beweis: Nach Voraussetzung gibt es ganze Zahlen m und $n>0$ mit $m\zeta(F) = n\zeta(G)$. Die charakteristische Klasse des Bündels $H := F^m \otimes G^n$ ist dann $\zeta(H) = 2m\,\zeta(F) = 2n\,\zeta(G)$. Wegen 7.6 kann man o.B.d.A. annehmen

$$\sigma_H = \widetilde{\sigma_H},\ \sigma_F = \widetilde{\sigma_F},\ \sigma_G = \widetilde{\sigma_G}.$$

Nach 6.7 gilt $\sigma_H = \widetilde{\sigma_F \times \sigma_G}$, sodaß für jedes $x \in X$ die Inklusion

$$\sigma_H^{-1}(\sigma_H x) \subset \sigma_F^{-1}(\sigma_F x) \cap \sigma_G^{-1}(\sigma_G x)$$

besteht. Zu zeigen ist also noch etwa

$$\sigma_F^{-1}(\sigma_F x) \subset \sigma_H^{-1}(\sigma_H x).$$

Dazu genügt es, für jeden gewöhnlichen Punkt $z \in \sigma_F^{-1}(\sigma_F x)$

$$\dim_z \sigma_F^{-1}(\sigma_F x) \leq \dim \sigma_H^{-1}(\sigma_H z)$$

nachzuweisen.

Falls $\dim_z \sigma_F^{-1}(\sigma_F x) > \dim \sigma_H^{-1}(\sigma_H z)$ wäre, könnte man (da $\sigma_F^{-1}(\sigma_F x)$ projektiv-algebraisch ist!) durch einen Punkt $y \in \sigma_F^{-1}(\sigma_F x) - \sigma_H^{-1}(\sigma_H z)$ eine irreduzible Kurve $C_y \subset \sigma_F^{-1}(\sigma_F x)$ finden, die $\sigma_H^{-1}(\sigma_H z)$ nur in einer diskreten Menge schneidet. Es folgt nun

$$\dim \sigma_H C_y = \dim C_y = 1.$$

Andererseits folgt wegen $C_y \subset \sigma_F^{-1}(\sigma_F x)$ aus 7.4 a)

$$\zeta(C_y) \circ \zeta(H) = 2m\,\zeta(C_y) \circ \zeta(F) = 0$$

im Widerspruch zu 7.4)d).

8.2 Eine Halbgruppe von Homologieklassen.- Der eben bewiesene Satz 8.1 gibt uns die Möglichkeit, als Urbild des Halbgruppenepimorphismus ε aus 6.7 eine (im allgemeinen) wesentlich kleinere Halbgruppe als G(X) zu nehmen. Wir geben dazu die

Definition: Es sei Y eine zusammenhängende kompakte komplexe Mannigfaltigkeit der Dimension n. Eine holomorphe Homologieklasse $\alpha \in H^a_{2n-2}(Y,Z)$ heiße regulär, falls es ein Geradenbündel ohne Basispunkte über Y mit charakteristischer Klasse α gibt.

Da die basispunktfreien Geradenbündel eine Halbgruppe bilden, so auch die regulären Homologieklassen. Diese Halbgruppe werde mit H(Y) bezeichnet. H kann ebenso wie G und P zu einem kontravarianten Funktor gemacht werden. Die Abbildung

$$\zeta : G(Y) \ni F \longrightarrow \zeta(F) \in H(Y)$$

ist ein Halbgruppenepimorphismus von G(Y) auf H(Y). ζ ist sogar eine natürliche Transformation von G in H. Die additive Relation

$$\eta := \varepsilon \circ \zeta^{-1} : H(Y) \longrightarrow G(Y) \longrightarrow P(Y)$$

ist surjektiv und wegen Satz 8.1 eindeutig, definiert also einen Halbgruppenepimorphismus $\eta : H(Y) \longrightarrow P(Y)$, der ebenfalls eine natürliche Transformation ist. Wir haben also den

Hauptsatz über holomorphe Abbildungen projektiv-algebraischer Mannigfaltigkeiten: Es gibt einen Halbgruppenepimorphismus

$$\eta : H(X) \longrightarrow P(X).$$

Da H(X) abzählbar ist, hat man die Folgerung:

Jede projektiv-algebraische Mannigfaltigkeit läßt nur abzählbar viele nicht äquivalente zusammenhängende holomorphe Abbildungen auf normale projektiv-algebraische Räume zu.

Für eine projektiv-algebraische Mannigfaltigkeit X ist die Halbgruppe P(X) zwar abzählbar, aber im allgemeinen nicht endlich. Einfache Beispiele dazu findet man in gewissen Periodentori.

8.3 Der Kegel $\mathbb{Q}^+ \cdot \tau H(X)$.- Falls $H^a_{2n-2}(X,Z)$ eine Torsionsuntergruppe T enthält, so betrachte man die Abbildung

$$\tau : H(X) \longrightarrow H^a_{2n-2}(X,Z) \longrightarrow H^a_{2n-2}(X,Z)/T.$$

Besitzen zwei reguläre Homologieklassen $\alpha, \beta \in H(X)$ gleiches τ-Bild $\tau(\alpha) = \tau(\beta)$, so muß es eine natürliche Zahl $n > 0$ mit $n\alpha = n\beta$ geben. Aus 8.1 folgt dann $\eta(\alpha) = \eta(\beta)$. Man kann also η über τ faktorisieren.

Daher interessiert weniger die Struktur von H(X) als die von $\tau(H(X))$. Ist $b := b^a_{2n-2}(X)$, so kann man $\tau H(X)$ als Unterhalbgruppe von Z^b auffassen. Die Einbettung $Z \hookrightarrow \mathbb{Q}$ induziert eine Einbettung $\tau H(X) \hookrightarrow \mathbb{Q}^b$. Bezeichnet man mit $\mathbb{Q}^+$ die Menge der positiven rationalen Zahlen, so ist die Menge $\mathbb{Q}^+ \cdot \tau H(X) \subset \mathbb{Q}^b$ ein Kegel mit

i) $\tau H(X) \subset \mathbb{Q}^+ \cdot \tau H(X)$.

ii) Zu jedem $\alpha \in \mathbb{Q}^+ \cdot \tau H(X)$ findet sich eine ganze Zahl $n > 0$ mit $n\alpha \in \tau H(X)$.

iii) $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}^+ \cdot \tau H(X) \Rightarrow \alpha + \beta \in \mathbb{Q}^+ \cdot \tau H(X)$.

Kürzt man $\mathbb{Q}^+ \cdot \tau H(X) =: \hat{H}(X)$ ab, so hat man den

Satz: $\hat{H}(X)$ ist ein Kegel in $\mathbb{Q}^b$, der bezüglich der Vektoraddition in $\mathbb{Q}^b$ eine Halbgruppe bildet. Es gibt einen Halbgruppenepimorphismus $\hat{\eta} : \hat{H}(X) \to P(X)$ mit

1) $\hat{\eta}(\lambda\alpha) = \hat{\eta}(\alpha)$ für $\lambda \in \mathbb{Q}^+$

2) $\eta = \hat{\eta} \circ \tau : H(X) \to P(X)$.

8.4 Homologieklassen von Hyperebenenschnitten.- Eine Homologieklasse α ist genau dann ähnlich zur Klasse eines Hyperebenenschnittes auf X, wenn $\eta(\alpha) = id$. Die Klassen der Hyperebenenschnitte bilden eine Unterhalbgruppe von H(X) und ihre Divisionshomologieklassen eine Unterhalbgruppe von $\tau H(X)$. Daß diese sehr groß ist, ersieht man aus dem

Satz: Die Halbgruppe

$$\hat{H}_0(X) := \{\gamma \in \hat{H}(X) : \hat{\eta}(\gamma) = id \in P(X)\} \subset \hat{H}(X)$$

ist ein konvexer Kegel, der in $\hat{H}(X)$ dicht liegt. $\hat{H}_0(X)$ ist ein Ideal in $\hat{H}(X)$.

Beweis: Liegt γ in $\hat{H}_o(X)$, so auch $\gamma+\alpha$ für alle $\alpha\in\hat{H}(X)$. Da es mindestens eine Klasse $\gamma\in\hat{H}_o(X)$ gibt, kann man zu jedem $\alpha\in\hat{H}(X)$ eine Folge

$$\alpha + (1/n)\gamma \in \hat{H}_o(X)$$

finden, welche gegen α konvergiert. Also liegt $\hat{H}_o(X)$ dicht in $\hat{H}(X)$.

8.5 Anwendungen: $b^a_{2n-2}(X) = 1$ oder 2.- Im Falle $b^a_{2n-2}(X) = 1$ ist $\hat{H}(X) = \mathbb{Q}^+ \subset \mathbb{Q}^1$. Es folgt:

Eine projektiv-algebraische Mannigfaltigkeit X mit $b^a_{2n-2}(X) = 1$ läßt außer der identischen und der konstanten Abbildung keine zusammenhängenden holomorphen Abbildungen auf normale projektiv-algebraische Räume zu.

Dies ist bekannt; X läßt ja nicht einmal derartige Abbildungen auf nicht projektiv-algebraische Räume zu (s. [15]).

Im Falle $b^a_{2n-2}(X) = 2$ ist $\hat{H}(X)$ ein konvexer Kegel in $\mathbb{Q}^2$. Ist $\sigma\in P(X)$ nicht die identische Abbildung, so muß $\sigma = \hat{\eta}(\alpha)$ mit $\alpha\in\hat{H}(X)$, $\alpha\notin\hat{H}_o(X)$ gelten. Wegen 8.4 liegen alle derartigen α aber auf dem Rand von $\hat{H}(X)$, der aus höchstens zwei Halbgeraden besteht. Es folgt:

Eine projektiv-algebraische Mannigfaltigkeit X mit $b^a_{2n-2}(X) = 2$ läßt außer der identischen und der konstanten Abbildung höchstens noch zwei weitere zusammenhängende holomorphe Abbildungen auf normale projektiv-algebraische Räume zu.

III
PSEUDOKONKAVITÄT

§ 9 Umgebungen analytischer Mengen auf homogenen Mannigfaltigkeiten

Unser Ziel ist es, die Pseudokonkavität von zusammenhängenden Umgebungen gewisser analytischer Mengen in gewissen homogenen Mannigfaltigkeiten nachzuweisen. Wir erreichen dies, indem wir für diese analytischen Mengen eine Umgebungsbasis angeben, die nur aus Mengen besteht, deren Rand in allen Punkten pseudokonkav ist.

9.1 Schlauchumgebungen.- Es sei $X = G/I$ eine kompakte homogene komplexe Mannigfaltigkeit und A eine analytische Menge in X. Wir geben die

Definition: $U_c' := \{y \in \mathfrak{g} : \sum_1^N y_\nu \bar{y}_\nu < c\}$, $0 < c \in R$, seien Kugelumgebungen der 0 in der Liealgebra $\mathfrak{g}$ von G bezüglich festgehaltener komplexer kartesischer Koordinaten $y_1, \ldots, y_N$ in $\mathfrak{g}$. $C \in R$ sei so klein gewählt, daß die Exponentialabbildung $\exp: \mathfrak{g} \to G$ auf U_C' biholomorph ist. Weiter seien $U_c := \exp U_c'$ für $0 < c < C$. Dann heißt jede Menge

$$U_c \cdot A = \{\sigma(a) : \sigma \in U_c,\ a \in A\} \subset X,\quad 0 < c < C,$$

ein Schlauchgebiet um A in X.

Alle Mengen U_c, $0 < c < C$, besitzen die Eigenschaften:

i) $U_c = (U_c)^{-1}$ (vgl. 4.2)

ii) ∂U_c ist eine reell-differenzierbare Mannigfaltigkeit

iii) Zu jedem $\tau \in \overline{U_c}$ gibt es in kanonischer Weise eine einparametrige reelle Transformationsgruppe $R \ni t \to \tau^t \in G$ mit $\tau^1 = \tau$ und $\tau^t \in U_c$ für $-1 < t < 1$. (Es ist $(\exp v)^t = \exp v \cdot t$ für $v \in \mathfrak{g}$.)

Die Schlauchgebiete um A bilden eine Umgebungsbasis von A in X. Dazu ist nur zu zeigen:

Es sei $W \subset X$ eine offene Umgebung von A in X. Dann ist die Menge

$$\{\sigma \in G : \sigma A \subset W\}$$

offen in G.

Der Beweis ist elementar auf Grund der Kompaktheit von X.

9.2 Notwendige Bedingungen für Randpunkte.- Zunächst sei U eine beliebige relativkompakte Umgebung von ε in G.

Hilfssatz: Ein Punkt $q \in X$ gehört genau dann zu $\partial(U \cdot A)$, wenn es eine Transformation $\tau \in \partial U$ und einen Punkt $a \in A$ gibt mit

1) $q = \tau(a)$
2) $\pi_a^{-1}(A) \cap \mathring{U}^{-1} \cdot \tau = \emptyset$.

Dabei ist $\pi_x: G \ni \sigma \to \sigma(x) \in X$ für $x \in X$.

Beweis: Alle Projektionen π_x, $x \in X$, sind offen. Also ist $\mathring{U} \cdot A = \bigcup_{a \in A} \mathring{U} \cdot a$ eine offene Teilmenge von $U \cdot A$. Da A und $\overline{U}$ kompakt sind, folgt $\overline{U \cdot A} = \overline{U} \cdot A$. Damit ergibt sich

$$(1) \qquad \partial(U \cdot A) \subset \overline{U} \cdot A - \mathring{U} \cdot A \subset (\partial U) \cdot A.$$

Weiter ist $\pi_q^{-1}(A) = \pi_{\tau a}^{-1}(A) = \pi_a^{-1}(A) \circ \tau^{-1}$ und die Bedingung 2) ist also gleichwertig mit $\pi_q^{-1}(A) \cap \mathring{U}^{-1} = \emptyset$. Dies heißt aber gerade

$$(2) \qquad q \notin \mathring{U} \cdot A.$$

Sei also nun $q \in \partial(U \cdot A)$ vorgegeben. Aus (1) folgt $q = \tau(a)$ mit $a \in A$ und $\tau \in \partial U$. Da (2) erfüllt ist, folgt auch 2). Jetzt seien umgekehrt 1) und 2) vorausgesetzt. Wegen $\tau \in \partial U$ folgt $q \in \overline{U \cdot A}$. Aus (2) ergibt sich dann $q \in \partial(U \cdot A)$, w.z.b.w.

Nun sei $U = U_c \subset G$ wie in 9.1. Dann gilt der

Satz: Ist $q = \tau(a)$, $\tau \in \partial U$, $a \in A$, ein Punkt von $\partial(U \cdot A)$, so gilt

$$T(\varepsilon, I_a) \subset T_R(\varepsilon, \partial U \circ \tau).$$

Ist überdies a gewöhnlicher Punkt von A, so gilt sogar

$$T(\varepsilon, \pi_a^{-1}(A)) \subset T_R(\varepsilon, \partial U \circ \tau).$$

Beweis: I_a ist komplexe Untermannigfaltigkeit von G. Falls a gewöhnlicher Punkt von A ist, so auch ε gewöhnlicher Punkt von $\pi_a^{-1}(A)$. Die auftretenden Tangentialräume sind also alle erklärt. $\partial U \circ \tau$ ist eine reelle Mannigfaltigkeit, die wegen $U = U^{-1}$ nach dem Hilfssatz die Eins ε enthält. Die reelle Codimension dieser Mannigfaltigkeit ist 1. Man kann also in einer Umgebung $W \subset G$ von ε lokale reelle Koordinaten $x_1, \ldots, x_{2N}$ einführen, die

$$\partial U \circ \tau \cap W = \{\sigma \in W: x_1(\sigma) = 0\}$$
$$U \circ \tau \cap W = \{\sigma \in W: x_1(\sigma) > 0\}$$

erfüllen. Wegen 2) aus dem Hilfssatz nimmt die Funktion x_1 auf $I_a \cap W$, bzw. auf $\pi_a^{-1}(A) \cap W$ ein lokales Maximum in ε an, d.h.

$$dx_1 | T(\varepsilon, I_a) = 0, \text{ bzw. } dx_1 | T(\varepsilon, \pi_a^{-1}(A)) = 0.$$

Nun ist aber $T_R(\varepsilon, \partial U \circ \tau)$ gerade der reelle Vektorraum der Tangentialvektoren $t \in T(\varepsilon, G) = \mathfrak{g}$ mit $dx_1(t) = 0$. Daraus folgt die Behauptung.

Hiermit ist gezeigt, daß $T(\varepsilon, I_a)$, bzw. $T(\varepsilon, \pi_a^{-1}(A))$ in einer reellen Hyperebene von $\mathfrak{g}$ liegen. Es folgt jedoch sofort, daß beide Vektorräume auch in einer, nur von τ und U abhängenden komplexen Hyperebene aus $\mathfrak{g}$ liegen. Setzt man nämlich

$$H(U,\tau) := \sum \{V: V \subset T_R(\varepsilon, \partial U \circ \tau) \text{ ist } \mathbb{C}\text{-Untervektorraum von } \mathfrak{g}\},$$

so ist $H(U,\tau)$ ein komplexer Vektorraum mit $T(\varepsilon, I_a) \subset H(U,\tau)$, bzw. $T(\varepsilon, \pi_a^{-1}(A)) \subset H(U,\tau)$.

9.3 Um die einschränkenden Bedingungen aus 9.2 später besser ausnützen zu können beweisen wir hier noch den

Hilfssatz: Es sei $A \subset X$ eine analytische Teilmenge von X und H ein 1-codimensionaler $\mathbb{C}$-Untervektorraum der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ von G. Dann gibt es eine analytische Menge $A_H \subset A$ mit

$$A_H \cap M(A) = \{a \in M(A): T(\varepsilon, \pi_a^{-1}(A)) \subset H\}.$$

(M(A) sei dabei die Mannigfaltigkeit der gewöhnlichen Punkte von A.)

Beweis: O.B.d.A. kann man A irreduzibel annehmen. Die zu A gehörende Idealgarbe $\mathcal{J}(A)$ ist von endlichem Typ (vgl.[12]).

Zu jedem Punkt $a \in A$ gibt es also eine Umgebung U_a von a in X und endlich viele Schnitte $f_1,\dots,f_k \in \Gamma(U_a, \mathcal{J}(A))$ mit

$$\mathcal{J}(A)_x = \mathcal{O}_x(f_1)_x + \dots + \mathcal{O}_x(f_k)_x$$

für alle $x \in U_a$. Dann ist der Tangentialraum im Punkt $b \in U_a \cap N(A)$

$$T(b,A) = \{t \in T(b,X): t(f_1) = \dots = t(f_k) = 0\}.$$

Nun seien $y_1,\dots,y_N$ komplexe Koordinaten in einer Umgebung von $\xi \in G$. Die holomorphe Matrix

$$R(b) := \begin{pmatrix} \frac{\partial(f_1 \circ \pi_b)}{\partial y_1}(\xi) & \dots & \frac{\partial(f_1 \circ \pi_b)}{\partial y_N}(\xi) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial(f_k \circ \pi_b)}{\partial y_1}(\xi) & \dots & \frac{\partial(f_k \circ \pi_b)}{\partial y_N}(\xi) \end{pmatrix}, \quad b \in A \cap U_a$$

hat in jedem gewöhnlichen Punkt b von A den Rang r := codim A Weiter sei $h = (h_1,\dots,h_N) \in \mathbb{C}^n$ ein Vektor mit

$$H = \{t \in \eta: t = \sum_1^N t_\nu \frac{\partial}{\partial y_\nu}, \ \sum_1^N t_\nu h_\nu = 0\}.$$

Dann wird durch

$$A_{H,a} := \left\{ b \in A \cap U_a : \operatorname{rg} \begin{pmatrix} R(b) \\ h \end{pmatrix} = r \right\}$$

eine analytische Menge in $A \cap U_a$ definiert. Diese Menge ist unabhängig von der Auswahl der Funktionen $f_1,\dots,f_k \in \Gamma(U_a, \mathcal{J}(A))$ Durch Zusammensetzen erhält man also eine analytische Menge $A_H \subset A$, die in U_a mit $A_{H,a}$ übereinstimmt.

Zu zeigen ist jetzt noch, daß $a \in N(A)$ genau dann zu A_H gehört, wenn $T(\xi, \pi_a^{-1}(A))$ in H liegt. Dazu denken wir uns U_a so klein gewählt, daß $\pi_a^{-1}(U_a)$ biholomorph äquivalent zu einem Produkt $I_a \times U_a$ ist. Dann wird

$$\begin{aligned} T(\xi, \pi_a^{-1}(A)) &= T(\xi \times a,\ I_a \times A) = T(\xi, I_a) \oplus T(a,A) = \\ &= \{ t \in \eta : t(f_1 \circ \pi_a) = \dots = t\,(f_k \circ \pi_a) = 0 \} = \\ &= \{ t \in \eta : t = \textstyle\sum t_\nu \frac{\partial}{\partial y_\nu} \quad \text{und} \\ &\qquad \textstyle\sum t_\nu \frac{\partial (f_\varkappa \circ \pi_a)}{\partial y_\nu}(\xi) = 0 \text{ für } 1 \le \varkappa \le k \}. \end{aligned}$$

Nach Definition von $A_{H,a}$ gehört also a genau dann zu $A_{H,a}$, wenn für alle $t = \sum t_\nu \partial/\partial y_\nu \in T(\xi, \pi_a^{-1}(A))$ gilt $\sum t_\nu h_\nu = 0$, d.h., $t \in H$.

§ 10 Schlauchgebiete im komplexen P^n.

10.1 Stützflächen.- Beim Nachweis der Pseudokonkavität werden wir das Kriterium 3.3 (ii) entscheidend heranziehen. Zur Abkürzung geben wir die

Definition: Es sei Y eine offene Teilmenge des komplexen Raums X und q ein Randpunkt von Y. Eine lokale Stützfläche für ∂Y im Punkte q ist eine Menge A, die in einer Umgebung U von q in X analytisch ist und folgende Eigenschaften besitzt:

i) $\dim A = \dim_q A \geq 1$,

ii) $A - \{q\} \subset Y$.

A heißt globale Stützfläche, falls $U = X$ ist.

Das Kriterium 3.3 (ii) lautet dann speziell für Mannig - faltigkeiten:

Kriterium: Es sei Y eine offene Teilmenge der komplexen Mannigfaltigkeit X und $q \in X$ ein Randpunkt von Y. Gibt es eine lokale Stützfläche A für Y in q von einer Dimension $\dim A \geq 1$, so ist Y pseudokonkav im Punkte q.

10.2 Pseudokonkavität der Umgebungen analytischer Mengen.

Aus § 9 folgt leicht der

Satz: Ist $A \subset P^n$ eine nichtdiskrete analytische Menge und $U = U_{\mathfrak{C}}$ eine Umgebung von $\mathfrak{C}$ in $PGL(n,\mathbb{C})$ wie in 9.1, dann gibt es zu jedem Randpunkt q des Schlauchgebiets $U \cdot A$ eine Trans - formation $\tau \in \partial U$ so, daß $\tau(A)$ eine globale Stützfläche für $\partial(U \cdot A)$ in q ist.

Beweis: Nach 9.1 ist $q = \tau(a)$ mit $a \in A$ und $\tau \in \partial U$. Nach 9.2 ist $T(\mathfrak{C}, I_a) \subset H$, wo $H \subset q$ ein mindestens 1-codimensionaler $\mathbb{C}$-Untervektorraum ist, der nur von τ und U abhängt. Falls es nun noch einen anderen Punkt $q' = \tau(a') \in \tau(A) \cap \partial(U \cdot A)$, $a \neq a'$, gäbe, so folgte auch $T(\mathfrak{C}, I_{a'}) \subset H$. Andererseits operiert I_a transitiv auf $P^n - \{a\}$. Daraus ergibt sich

$$\dim I_a \cap I_{a'} = \dim I_a - \dim P^n.$$

In Verbindung mit 4.2 iii) kommt man zu dem Widerspruch

$$\begin{aligned}\dim\ T(\mathfrak{x},I_a)+T(\mathfrak{x},I_{a'}) &= \\ &= 2\dim T(\mathfrak{x},I_a) - \dim T(\mathfrak{x},I_a)\cap T(\mathfrak{x},I_{a'}) = \\ &= \dim T(\mathfrak{x},I_a) + \dim P^n = \\ &= \dim \mathfrak{q}.\end{aligned}$$

Damit ist gezeigt: $\tau(A)\cap\partial(U\cdot A) = \{q\}$.

Da die Mengen $U_c\cdot A$, $0<c<C$, eine Umgebungsbasis von A bilden, folgt aus 10.1 das

Korollar: Jede zusammenhängende offene Umgebung einer nichtdiskreten algebraischen Menge $A\subset P^n$ ist pseudokonkav.

Die Anwendung der in 3.2 zusammengefaßten Ergebnisse von ANDREOTTI liefert die

Folgerung: Die zusammenhängende offene Menge $U\subset P^n$ enthalte eine nichtdiskrete algebraische Teilmenge des P^n. Dann ist jede auf U holomorphe Funktion konstant. (Dies ist auch einfacher einzusehen, vgl. [16].) Der Körper der auf U meromorphen Funktionen ist eine einfache algebraische Erweiterung des Körpers $\mathbb{C}(z_1/z_0,\dots,z_n/z_0)$.

10.3 Verallgemeinerung auf Unterräume.- Ein komplexer Raum X heißt bekanntlich quasiprojektiv, falls man X darstellen kann als analytische Menge in einer offenen Teilmenge des P^n, $n\geq 0$.

Korollar zu Satz 10.2: Es sei X ein n-dimensionaler irreduzibler komplexer Raum und $\varphi: X\to P^k$ holomorph und injektiv. Es gebe eine irreduzible algebraische Menge $Y\subset P^k$ mit $n + \dim Y > k$. Weiter enthalte $\varphi^{-1}(Y)\subset X$ eine kompakte Zusammenhangskomponente A. Dann besitzt A in X eine Umgebungsbasis V'_c, $0<c<C$, mit:

Zu jedem Randpunkt $q\in\partial V'_c$ existiert eine analytische Menge $M\subset P^k$ der Dimension $\dim Y$ derart, daß

i) $\varphi(q)\in M$

ii) $\varphi^{-1}(M) - \{q\}\subset \overset{o}{V}{}'_c$.

Beweis: Es sei $B\subset\subset X$ eine offene relativkompakte Umgebung von A in X. Nach REMMERT [13], Satz 21', ist $\varphi(B)$ lokal-analytisch in P^k. Daher kann man zum Beweis des Satzes o.B.d.A.

$X \subset P^k$ quasiprojektiv voraussetzen. Nun wähle man Umgebungen $V_c = U_c \cap Y$, $0 < c < C$, von Y wie in 9.1. Setzt man $V'_c :=$ $= Z_A(X \cap V_c)$, so ist $\{V'_c\}$ eine Umgebungsbasis von A in X mit

$$\partial V'_c \subset X \cap \partial V_c \quad \text{für} \quad 0 < c < C',$$

sobald $C' > 0$ klein genug gewählt ist. Zu jedem $q \in \partial V'_c \subset \partial V_c$ existiert dann nach 10.2 eine analytische Menge $M = \tau(Y)$ mit

i) $q \in M$
ii) $M - \{q\} \subset \overset{o}{V}_c$.

Aus ii) folgt

$$\varphi^{-1}(M) - \{q\} = X \cap M - \{q\} \subset X \cap \overset{o}{V}_c = \overset{o}{V}'_c,$$

w.z.b.w.

10.4 Folgerungen für projektiv-algebraische Räume.- Es sei $X \subset P^k$ projektiv-algebraisch und irreduzibel, sowie $A \subset X$ eine analytische Menge mit

$$A = X \cap Y, \quad \dim Y + \dim X > k$$

und Y analytisch in P^k. Aus 10.3 und 3.3 (ii) folgt:

Jede zusammenhängende Umgebung U von A in X ist pseudokonkav, wenn jede irreduzible Komponente von U die Menge A trifft.

Beachtet man das in 3.3 über die Normalisierung gesagte, so ergibt sich aus 3.2:

Ist speziell U irreduzibel, so ist jede auf U holomorphe Funktion konstant und der Körper der auf U meromorphen Funktionen ist eine einfache algebraische Erweiterung von $C(u_1,\ldots,u_d)$ mit $d = \dim X$.

Insbesondere kann A nicht als Faser einer nicht konstanten holomorphen Abbildung von X auftreten. Für jede nicht konstante holomorphe Abbildung σ von X gilt also

$$2 \dim X - \dim \sigma X \leq k.$$

Ist $2 \dim X - \dim \sigma X = k$, so ist σ nicht entartet. Wir haben daher den

Satz (REMMERT - VAN DE VEN [15]): Ist $X \subset P^k$ irreduzibel und $\sigma: X \to Y$ eine holomorphe Abbildung auf einen mindestens eindimensionalen komplexen Raum Y, so gilt

$$2 \dim X - \dim Y \leq k.$$

Ist $2 \dim X - \dim Y = k$, so ist σ nicht entartet.

10.5 Folgerungen für quasiprojektive Räume.- Es sei X ein irreduzibler komplexer Raum und $\varphi: X \to P^k$ holomorph und injektiv. Enthält X eine kompakte analytische Teilmenge A mit

$$\dim X + \dim A > k,$$

so ist X nach 10.3 pseudokonkav. Nach 3.3 gibt es eine mit X gleichdimensionale irreduzible algebraische Menge $Y \subset P^k$ mit $\varphi X \subset Y$. Wir haben den

Satz: Es sei X ein irreduzibler komplexer Raum, $\varphi: X \to P^k$ holomorph und injektiv, und $A \subset X$ eine kompakte analytische Teilmenge mit $\dim X + \dim A > k$. Dann gibt es einen mit X gleichdimensionalen projektiv-algebraischen Raum $Y \subset P^k$, der φX enthält.

Ein anderer Spezialfall von 10.3 ist der

Satz: Es sei $X \subset P^k$ ein irreduzibler quasiprojektiver Raum. Es gebe eine reindimensionale algebraische Menge $Y \subset P^k$ mit $\dim X + \dim Y > k$. Die Menge $X \cap Y$ besitze eine kompakte Zusammenhangskomponente. Dann ist X pseudokonkav. X läßt sich zu einer algebraischen Menge in P^k fortsetzen.

Unter der Fortsetzung von analytischen Mengen ist dabei folgendes zu verstehen: A sei analytisch und irreduzibel in einer offenen Menge $U \subset P^k$. Eine irreduzible analytische Menge $A' \subset V$, $U \subset V \subset P^k$, heißt Fortsetzung von A nach V, wenn sie A umfaßt und mit A gleichdimensional ist.

Ein Spezialfall hiervon ist der

Fortsetzungssatz vom ROTHSTEIN - Typ: Es sei Y algebraisch in P^k und A analytisch und irreduzibel in einer Umgebung von Y. Gilt

$$\dim A + \dim Y > k, \quad A \cap Y \neq \emptyset,$$

so gestattet A eine Fortsetzung nach P^k.

(Ähnliche Sätze s.[18].) Insbesondere ergibt sich hieraus:

Es sei $E \subset P^k$ algebraisch und A analytisch in $P^k - E$ und irreduzibel. Es gebe eine algebraische Menge $Y \subset P^k$ mit

$$\dim A + \dim Y > k$$

derart, daß A in eine Umgebung von $Y \wedge E$ analytisch fortgesetzt werden kann. Dann ist $\bar{A}$ eine in ganz P^k analytische Menge.

Mit Hilfe des Satzes von BERTINI gelangt man zu schärferen Aussagen, wenn man an Y noch eine Anforderung stellt:

Es sei $Y \subset P^k$ algebraisch, und A analytisch und irreduzibel in einer Umgebung V von Y. Weiter sei Y Durchschnitt von (höchstens) d-1 Hyperflächen im P^k, $d := \dim A \geq 1$. Gilt $A \wedge Y \neq \emptyset$, so gibt es eine algebraische Menge $A' \subset P^k$ mit

$$A = A' \wedge V.$$

Beweis: $A' \subset P^k$ sei die irreduzible Fortsetzung von A nach ganz P^k. Zu zeigen ist, daß $A' \wedge V$ irreduzibel ist. Denn dann muß $A' \wedge V = A$ gelten.

Es werde deshalb angenommen $A' \wedge V = A \cup A_1$, wo $A_1 \neq A$ eine d-dimensionale analytische Menge in V ist. Aus der Voraussetzung folgt dann die Existenz von Hyperflächen $H_1, \ldots, H_{d-1} \subset P^k$, die sich zu A' in allgemeiner Lage befinden und

$$Y' := H_1 \wedge \ldots \wedge H_{d-1} \subset V$$

erfüllen. O.B.d.A. kann man annehmen, daß alle diese Hyperflächen gleichen Grad haben. Außerdem kann man sie noch so wählen, daß

$$\dim Y' \wedge A \wedge A_1 = 0$$

erfüllt ist. Dann muß $Y' \wedge A \neq Y' \wedge A_1$ sein, und $Y' \wedge A'$ ist reduzibel. Dies ist aber ein Widerspruch zum Satz von BERTINI (vgl.[1]).

Eine weitere einfache Folgerung aus dem Satz von BERTINI ist dieser Fortsetzungssatz für meromorphe Funktionen:

Es sei $A \subset P^k$ Durchschnitt von (höchstens) k-1 Hyperflächen. Dann ist jede auf einer zusammenhängenden Umgebung U von A meromorphe Funktion auf ganz P^k meromorph fortsetzbar.

Beweis: Es sei f eine meromorphe Funktion auf U und $F \subset U \times P^1 \subset P^k \times P^1$ der abgeschlossene Graph von f. Man kann o.B.d.A. annehmen, daß A die Unbestimmtheitsmenge von f nicht schneidet. Dann ist F pseudokonkav und kann zu einer gleichdimensionalen irreduziblen analytischen Menge $F' \subset \subset P^k \times P^1$ fortgesetzt werden. Falls $F' \cap U \times P^1$ irreduzibel ist, stellt F' den Graph einer auf ganz P^k meromorphen Funktion f' dar, die f fortsetzt. Andernfalls findet man k-1 Hyperflächen gleichen Grades in allgemeiner Lage, so daß $(H_1 \cap \ldots \cap H_{k-1}) \times P^1 \cap F'$ reduzibel ist. Dies ist der Widerspruch zum Satz von BERTINI.

Trivialerweise gelten die beiden letzten Sätze wörtlich für k-dimensionale irreduzible projektiv-algebraische Räume, wenn man das Wort "Hyperfläche" durch "Hyperebenenschnitt" ersetzt.

10.6 Zusammenhang mit den klassischen Methoden.- In [5] verallgemeinert FUJIMOTO die klassischen Fortsetzungsmethoden für analytische Mengen und meromorphe Funktionen auf komplexe Räume. Die entscheidende Rolle spielen streng q-konvexe Funktionen auf einem komplexen Raum X, $1 \leq q \leq \dim X$. In Verallgemeinerung von 3.4 gilt der

Satz: Ist die Menge A im k-dimensionalen projektiv-algebraischen Raum X Durchschnitt von (höchstens) k-1 Hyperebenenschnitten, so gibt es eine streng (k-1)-konvexe Funktion v auf X-A so, daß die Mengen $\{v > c\}$, $c \in \mathbb{R}$, eine Umgebungsbasis von A bilden.

Beweis: Man kann o.B.d.A. annehmen, daß $A = H_1 \cap \ldots \cap H_{k-1}$ ist und alle Hyperebenenschnitte H_α zum gleichen vollständigen Linearsystem gehören. Für die durch dieses Linearsystem definierte Einbettung $\iota : X \to P^m$ gilt $\iota(A) = \iota(X) \cap E$, wo E ein linearer Unterraum von P^m der Dimension m-k+1 ist. Hat man etwa $E = N(z_0) \cap \ldots \cap N(z_{k-2}) \subset P^m$, so ist die Funktion

$$w(z) := \Big(\sum_{k-1 \leq j \leq m} z_j \bar{z}_j\Big) \Big/ \Big(\sum_{0 \leq j \leq k-1} z_j \bar{z}_j\Big)$$

streng (k-1)- konvex auf $P^m - E$. Die Funktion $v := w \circ \iota$ erfüllt dann die Behauptung.

Mit Hilfe dieser Funktion ergeben sich die beiden letzten Sätze von 10.5 auch aus [5].

§ 11 Schlauchgebiete auf komplexen Periodentori.

11.1 Es sei X ein Periodentorus und $T \subset X$ ein Untertorus (d.h., bei geeigneter Wahl eines Einselements $e \in X$ ist T eine zusammenhängende abgeschlossene Untergruppe). Dann gibt es eine natürliche Faserung $X \to X/T$. Daher besitzt T in X Umgebungen, welche nichtkonstante holomorphe Funktionen zulassen und deswegen nicht pseudokonkav sein können. Der Satz über pseudokonkave Umgebungen analytischer Mengen muß umformuliert werden. Wir beweisen in diesem § den Satz:

Satz: Es sei A eine nichtdiskrete zusammenhängende analytische Menge auf dem komplexen Periodentorus X und $A^* \subset X$ die natürliche Faser durch A (vgl. 4.4). Dann ist jede zusammenhängende offene Umgebung von A in A^* pseudokonkav.

Diese Behauptung ergibt sich sofort aus dem

11.2 Satz: Es sei A eine irreduzible analytische Menge auf dem komplexen Periodentorus $X = \mathbb{C}^n/D$ mit $A^* = X$. Weiter sei

$$m := \min \{ \dim A - \dim A \cap T : X \supset T \text{ echter Untertorus} \}.$$

Ist dann $V = U \cdot A$ ein Schlauchgebiet um A, so existiert zu jedem Randpunkt $q \in \partial V$ eine Transformation $\tau \in \partial U$, die eine Umgebung von $\tau^{-1}(q) \in A$ in A transformiert in eine lokale Stützfläche für ∂V in q.

Beweis: Ausgehend von A definieren wir eine absteigende Folge analytischer Teilmengen von A durch

$$S_0 := A$$
$$S_\nu := \text{Singularitätenmenge von } S_{\nu-1} \quad (\nu \geq 1).$$

Dann ist $\dim S_\nu < \dim S_{\nu-1}$ und $S_n = \emptyset$.

Nach 9.1 ist $q = \tau(a)$ mit $a \in A$ und $\tau \in \partial U$. Nach 9.2 existiert eine Hyperebene $H \subset T(0, \mathbb{C}^n) = \mathbb{C}^n$ mit $T(b, \pi_b^{-1}(A)) \subset H$ für alle gewöhnlichen Punkte $b \in A$ mit $\tau(b) \in \partial V$. Die Menge der gewöhnlichen Punkte $b \in A$ mit dieser Eigenschaft läßt sich zu einer analytischen Teilmenge A_H von A fortsetzen (s. 9.3). Allgemeiner betrachten wir die analog definierten analytischen Mengen $(S_\nu)_H$, $0 \leq \nu < n$, und beweisen zunächst:

11.3 Es sei $S \subset X$ eine irreduzible analytische Menge, $H \in \mathbb{C}^n$ eine Hyperebene und $S_H \subset S$ wie in 9.3 erklärt. Dann gibt es endlich viele echte Untertori $T^{(i)} \subset X$ mit $S_H^{(i)} \subset S \cap T^{(i)}$ für jede irreduzible Komponente $S_H^{(i)}$ von S_H.

Beweis: Es sei $x \in S_H^{(i)}$ ein gewöhnlicher Punkt von S und S_H. Dann gibt es auch eine ganze Umgebung $W \subset S_H^{(i)}$ von x, die nur gewöhnliche Punkte von S und $S_H^{(i)}$ enthält. Für jedes $y \in W$ gilt nach Konstruktion von S_H:

$$T(0, \pi_y^{-1}(S_H^{(i)})) \subset T(0, \pi_y^{-1}(S)) \subset H.$$

Dann folgt aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung einfach

$$\pi_x^{-1}(S_H^{(i)}) \subset H.$$

Die (nicht notwendig abgeschlossene) Menge $\pi_x(H) \subset X$ enthält also die analytische Menge $S_H^{(i)}$.

Nun werde X zu einer Gruppe gemacht, indem man x als Nullpunkt festhält. Dann ist $\pi_x H$ eine Untergruppe. Jetzt werde induktiv definiert

$$T^{(i)}_0 := S_H^{(i)}$$

$$T^{(i)}_{\nu+1} := T^{(i)}_\nu - T^{(i)}_\nu = \{x-y: x,y \in T^{(i)}_\nu\}.$$

Da $S_H^{(i)}$ irreduzibel ist, sind alle $T^{(i)}_\nu$ irreduzibel. Wegen $x \in S_H^{(i)}$ gilt $S_H^{(i)} \subset T^{(i)}_\nu$ für alle ν. Wegen $S_H^{(i)} \subset \pi_x(H)$ ist schließlich $T^{(i)}_\nu \subset \pi_x(H)$ für alle ν. Außerdem gibt es ein ν_i mit

$$T^{(i)}_\nu = T^{(i)}_{\nu_i} \quad \text{für alle } \nu \geq \nu_i.$$

Setzt man $T^{(i)} := T^{(i)}_{\nu_i}$, so ist $T^{(i)} \subset X$ eine analytische Menge, die wegen $T^{(i)} - T^{(i)} = T^{(i)}$ eine Untergruppe von X ist. Wegen $T^{(i)} \subset \pi_x(H)$ ist $T^{(i)}$ ein echter Untertorus, der außerdem $S_H^{(i)}$ umfaßt, q.e.d.

11.4 Der Beweis von Satz 11.2 wird nun folgendermaßen weitergeführt: Ist $b \in A$ ein beliebiger Punkt mit $\tau(b) \in \partial V$, so gibt es eine eindeutig bestimmte Menge $S_\nu \subset A$, die b als gewöhnlichen Punkt enthält. Jeder Punkt $b \in A$ mit $\tau(b) \in \partial V$

liegt also in einem von endlich vielen Tori $T^{(i)}_{\nu}$. Die Vereinigung T dieser Tori ist nach Voraussetzung eine analytische Menge in X mit

$$\dim A - \dim A \cap T \geq m.$$

Zu a existiert daher eine Umgebung $W \subset A$ und eine rein m-dimensionale analytische Menge $B \subset W$, die mit T nur den Punkt a gemeinsam hat. Kein Punkt $b \in B - \{a\}$ kann durch τ in ∂V abgebildet werden. Mithin folgt $\tau(B) \cap \partial V = \{q\}$.-

11.5 Allgemeine projektiv-algebraische Tori.- Ein allgemeiner projektiv-algebraischer Periodentorus hat dieselbe analytische Homologie, wie der komplex-projektive Raum gleicher Dimension. Speziell läßt X keine nichtkonstanten dimensionserniedrigenden holomorphen Abbildungen zu (s. REMMERT-VAN DE VEN [15]). Für jede nichtdiskrete analytische Teilmenge $A \subset X$ ist daher $A^{*} = X$ zu setzen. Satz 11.1 lautet dann:

Jede zusammenhängende Umgebung U einer nichtdiskreten analytischen Teilmenge in einem allgemeinen projektiv-algebraischen Torus X ist pseudokonkav.

Weiter bleiben alle Ergebnisse des § 10 auch hier richtig. Speziell hat man:

Jede auf U holomorphe Funktion ist konstant. Der Körper der auf U meromorphen Funktionen ist eine einfache algebraische Erweiterung des Körpers der meromorphen Funktionen auf X. Ist M eine analytische Menge in U mit

$$\dim M + \dim A > \dim X$$
$$M \cap A \neq \emptyset,$$

so ist M nach ganz X fortsetzbar.

§ 12 Ein Fortsetzungssatz.

12.1 Ziel dieses § ist ein Beweis für den

Fortsetzungssatz für meromorphe Funktionen: Es sei entweder $X = P^{n}(C)$ oder ein n-dimensionaler allgemeiner projektiv-

algebraischer Torus ($n \geq 3$) und $A \subset X$ eine analytische Menge mit

$$2 \dim A > n.$$

Ist dann f eine meromorphe Funktion auf einer zusammenhängenden Umgebung von A, so kann man f auf ganz X fortsetzen.

Der Beweis benutzt z.T. die Methoden aus [18]. Aus Gründen der Terminologie jedoch wird nicht immer auf ROTHSTEIN Bezug genommen. Es wird vielmehr auch die neuere Arbeit [5] zitiert

Wir zerlegen den Beweis in eine Anzahl kleinerer Schritte:

12.2 Eine Anwendung des Kontinuitätssatzes: Wir zeigen jetzt den

Hilfssatz: Es sei V eine offene Teilmenge der homogenen komplexen Mannigfaltigkeit $X = G/I$. Der Rand ∂V besitze im Punkte $q \in \partial V$ eine lokale StützfläcAder Dimension 1. Es gebe eine lokale einparametrige (reelle) Untergruppe

$$\tau^t: [-1,1] \ni t \longrightarrow \tau^t \in G$$

mit $\tau^t A \subset V$ für alle $t \in [-1,0)$ und $\tau^0 = \mathcal{E}$. Existiert dann eine Umgebungsbasis $\{Q_i\}$ von q derart, daß alle Mengen $Q_i \sim V$ zusammenhängend sind, so kann man jede auf V meromorphe Funktion auf eine Umgebung von q meromorph fortsetzen.

Beweis: Es sei $\nu: N \to A$ die Normalisierung von A, sowie $U \subset G$ eine offene Umgebung von $\mathcal{E}$ und φ die Abbildung

$$\varphi: N \times U \ni (c,\sigma) \longrightarrow \sigma(\nu(c)) \in X.$$

Weiter sei $p \in \bar{\nu}^{-1}(q)$ ein fester Punkt und N' eine offene Umgebung von p in N mit $N' \sim \nu^{-1}(q) = \{p\}$. Schließlich sei eine Kreisumgebung $K \subset\subset N'$ von p in der Mannigfaltigkeit N' festgehalten. Dann gilt $\varphi(\partial K \times \{\tau^t\}) \subset V$ für alle $t \in [-1,0]$.

Jetzt sei eine meromorphe Funktion f auf V vorgegeben. Die Funktion $f \circ \varphi$ ist dann meromorph auf der offenen Menge $\bar{\varphi}^{-1}(V) \subset N \times U$. Nach Voraussetzung gehören alle Kreisscheiben $K \times \{\tau^t\}$ mit $-1 \leq t < 0$ und außerdem noch $\partial K \times \mathcal{E}$ zu $\bar{\varphi}^{-1}(V)$. Aus dem Kontinuitätssatz (etwa in der Fassung [17]) folgt, daß man $f\varphi$ zu einer Funktion $\bar{f}$ fortsetzen kann, welche in einer Umgebung L der Mengen $K \times \{\tau^t\}$, $-1 \leq t < 0$, in $N' \times U$ mit $f \circ \varphi$ übereinstimmt, und noch auf einer Umgebung W von $(p,\mathcal{E})$ in $N' \times U$ meromorph ist.

Um dies Funktion $\overline{f}$ nach X zurückzuliften, wähle man eine lokalanalytische Menge $M \subset U$ mit $\{p\} \times M \subset W$ und so, daß die Abbildung

$$M \ni \sigma \to \sigma(q) = \varphi(p,\sigma) \in \lambda$$

biholomorph ist. Durch $f'(\sigma(q)) := \overline{f}(p,\sigma)$ wird auf der Umgebung $\varphi(\{p\} \times M)$ von q eine meromorphe Funktion f' erklärt. Wegen

$$f'(\sigma(q)) = \overline{f}(p,\sigma) = f(\varphi(p,\sigma)) \text{ für } (p,\sigma) \in \varphi^{-1}(V) \cap (\{p\} \times M)$$

stimmen auf $\varphi(L) \cap M(q)$ die Funktionen f' und f überein.

Nach Voraussetzung kann man endlich eine Umgebung $Q \subset \varphi(\{p\} \times M)$ von q in X mit zusammenhängendem $V \cap Q$ finden. Da $\varphi(L) \cap \varphi(\{p\} \times M)$ eine offene Teilmenge von $V \cap Q$ enthält, ist $f' | Q$ eine Forsetzung von f, w.z.b.w.

12.3 Übergang von lokaler zu globaler Fortsetzung.- Jetzt liege eine Situation wie in Hilfssatz 12.2 für jeden Punkt $q \in \partial V$ vor. Zusätzlich sei X kompakt und die Dimension aller lokalen Stützflächen mindestens 2. Dann gilt der

Hilfssatz: Man kann jede auf V meromorphe Funktion f auf eine offene Umgebung von $\overline{V}$ fortsetzen.

Beweis: Es sei $F \subset V \times P^1 \subset X \times P^1$ der abgeschlossene Graph von f. Nach [13] ist F eine analytische Menge in $V \times P^1$ von der Codimension 1. Wegen 12.2 gibt es zu jedem $q \in \partial V$ eine Umgebung W_q in X und eine analytische Menge $F_q \subset W_q \times P^1 \subset X \times P^1$ die über W_q der abgeschlossene Graph einer meromorphen Funktion ist, und außerdem

$$F_q \cap V \times P^1 = F \cap (W_q \times P^1)$$

erfüllt.

Die Menge V und damit auch $V \times P^1$ ist in der Notation von [S] Rothstein - (n-1)-pseudokonkav. Wie in Prop. 3.7 aus [S] findet man dann eine Umgebung W von V und eine analytische Menge $F_W \subset W \times P^1$ mit

$$F_W \cap V \times P^1 = F \cap W_q \times P^1$$

und die über W den abgeschlossenen Graphen einer meromorphen Funktion darstellt. Die Menge $\overline{F} := F \cup F_W$ ist der Graph einer

meromorphen Funktion $\bar{f}$ auf der Ungebung $V \cup W \subset X$ von $\bar{V}$ mit

$$\bar{f}|V = f.$$

Von nun an sei entweder $X = P^n(C)$ oder ein n-dimensionaler projektiv-algebraischer Torus. Die größten Schwierigkeiten des Beweises bereitet der

12.4 Nachweis der Zusammenhangsbedingung.- Hierfür zeigen wir die

Hilfsaussage: Es sei $A \subset X$ eine abgeschlossene Teilmenge und $V = U \cdot A \subset X$, $U = U_c \subset G$ wie in 9.1. Besitzt dann ein Punkt $q \in \partial V$ keine Umgebungsbasis $\{Q_i\}$ mit zusammenhängenden Mengen $Q_i \cap V$, so gibt es zwei Punkte a und $b \in A$, eine Umgebung Q von q mit

$$q = \sigma(a) = \tau(b), \quad \sigma, \tau \in \partial U,$$

und ein $t_1 < 1$ mit

$$Z_{\sigma^s(a)}(Q \cap V) \neq Z_{\tau^t(b)}(Q \cap V) \quad \text{für } t_1 \leq s, t < 1.$$

Beweis: Nach Voraussetzung gibt es eine Umgebung Q von q so, daß für keine Umgebung $Q' \subset Q$ von q die Menge $Q' \cap V$ zusammenhängend ist. Da A kompakt ist, kann man wie in 9.2 schreiben $q = \sigma(a)$ mit $\sigma \in \partial U$ und $a \in A$. Wegen der Stetigkeit der Abbildung $[0,1] \ni t \to \sigma^t(a) \in X$ gibt es ein t_0, $0 \leq t_0 < 1$, das

$$\sigma^t(a) \in Q \quad \text{für} \quad t_0 \leq t < 1$$

erfüllt. Man kann dann eine Folge (q_ν), $Q \cap V \ni q_\nu \to q$, finden, so, daß für alle ν gilt

$$(1) \qquad Z_{q_\nu}(Q \cap V) \neq Z_{\sigma^{t_0}(a)}(Q \cap V) = Z_{\sigma^t(a)}(Q \cap V), \quad t_0 \leq t < 1.$$

Dazu überlegt man sich nur folgendes: Ist $Q' \subset Q$ eine Umgebung von q, so auch

$$Q'' := Q' \cup \bigcup_{\nu \in Q' \cap V} Z_\nu(Q \cap V).$$

Da $Q'' \cap V = \bigcup_{\nu \in Q' \cap V} Z_\nu(Q \cap V)$ nicht zusammenhängend ist, muß es in $Q' \cap V$ einen Punkt q' geben, der, nicht in der gleichen Zusammenhangskomponente von $Q \cap V$ liegt wie $\sigma^{t_0}(a)$.

Jedes q_ν schreibt sich nun $q_\nu = \tau_\nu(b_\nu)$, $\tau_\nu \in U$ und $b_\nu \in A$. O.B.d.A. kann man annehmen, daß $\lim b_\nu =: b \in A$ und $\lim \tau_\nu =: \tau \in \bar{U}$ existieren. Dann muß $\tau(b) = q$ gelten. Es existieren Umgebungen $S \subset \bar{U}$, bzw. $B \subset A$ von σ in $\bar{U}$, bzw. b in A mit $S \cdot B \subset$

$\subset Q$. Dann existiert ein ν_0 mit $b_\nu \in B$ für $\nu \geq \nu_0$, und ein t_1, $t_0 \leq t_1 < 1$, mit $\tau_\nu^t \in S$ für $\nu \geq \nu_0$ und $t_1 \leq t \leq 1$. Es folgt

$$\tau_\nu^t(b_\nu) \in S \cdot B \subset Q \quad \text{für } \nu \geq \nu_0 \text{ und } t_1 \leq t \leq 1,$$

und hieraus

$$Z_{\tau_\nu^t 1(b_\nu)}(Q \frown V) = Z_{\tau_\nu(b_\nu)}(Q \frown V) = Z_{q_\nu}(Q \frown V) \quad \text{für } \nu \geq \nu_0.$$

Da $\tau^t 1(b)$ in $U(b) \frown Q$ eine zusammenhängende Umgebung besitzt, kann man ν_0 so vergrößern, daß für alle $\nu \geq \nu_0$ zusätzlich gilt

$$Z_{\tau_\nu^t 1(b_\nu)}(Q \frown V) = Z_{\tau^t 1(b)}(Q \frown V).$$

Nach (1) folgt

$$Z_{\sigma^s(a)}(Q \frown V) \neq Z_{\tau^t(b)}(Q \frown V) \quad \text{für } t_1 \leq s,t < 1.$$

Damit ist die Hilfsaussage bewiesen.

Folgerung: Ist $A = \bigcup_\iota A_\iota \in X$ abgeschlossen und sind alle A_ι irreduzible analytische Mengen mit $2 \dim A_\iota > n$, so besitzt jeder Punkt $q \in \partial V$, $V = U \cdot A$, eine Umgebungsbasis $\{Q_i\}$ mit zusammenhängenden Mengen $Q_i \frown V$.

Beweis: Andernfalls findet man nach der soeben bewiesenen Hilfsaussage zwei Mengen A_1 und A_2 und Punkte $a \in A_1$, $b \in A_2$, sowie Transformationen $\sigma, \tau \in \partial U$ mit $\sigma(a) = \tau(b) = q$, außerdem eine Umgebung Q von q und ein $t_0 < 1$ mit $\sigma^t(a) \in Q$ und $\tau^t(b) \in Q$ für $t_0 \leq t < 1$ und

$$Z_{\sigma^t(a)}(Q \frown V) \neq Z_{\tau^t(b)}(Q \frown V) \quad \text{für } t_0 \leq t < 1.$$

Nach 10.2, bzw. 11.2 gilt $\sigma(A_1) - \{q\} \subset V$ und $\tau(A_2) - \{q\} \subset V$.

Wegen $\dim_q(\sigma A_1 \frown \tau A_2) \geq 1$ gibt es eine mindestens eindimensionale analytische Menge $D := \sigma A_1 \frown \tau A_2 \subset X$ mit $q \in D$ und $D - \{q\} \subset V$. Man wähle nun einen stetigen Weg $\gamma_s : [0,1] \to Q \frown D$ mit $\gamma_1 = q$ und $\gamma_s \neq q$ für $s \neq 1$. Die Abbildungen

$$(s,t) \to \sigma^{t-1}(\gamma_s) \in \sigma^t(A_1) \subset X$$

$$(s,t) \to \tau^{t-1}(\gamma_s) \in \tau^t(A_2) \subset X$$

sind stetig, sodaß man ein t_1, $t_0 \leq t_1 < 1$, finden kann, das

$$\sigma^t 1^{-t}(\gamma_t) \in Q \frown V \text{ und } \tau^t 1^{-t}(\gamma_t) \in Q \frown V \text{ für } t_1 \leq t \leq 1$$

erfüllt. Die beiden Wege $\sigma^t 1^{-t}(\gamma_t)$ und $\tau^t 1^{-t}(\gamma_t)$, $t_1 \leq t \leq 1$, zusammen verbinden dann $\sigma^t 1(a)$ und $\tau^t 1(b)$ in $Q \frown V$. Dies ist der Widerspruch!

12.5 Beweis des Fortsetzungssatzes.- Dazu genügt es, folgendes zu zeigen:

Ist $A = \bigcup_\iota A_\iota \subset X$ abgeschlossen, sind alle A_ι irreduzible analytische Mengen mit $2 \dim A_\iota > n$, und ist $\gamma_t : [0,1] \to G$ ein stetiger Weg mit $\gamma_0 = \varepsilon$, so kann man jede auf einer Umgebung von $\overline{U \cdot A}$ meromorphe Funktion meromorph auf eine Umgebung von $\overline{\bigcup_{0 \le t \le 1} U \cdot \gamma_t(A)}$ fortsetzen.

Beweis: Falls die Behauptung falsch ist, existiert eine meromorphe Funktion f auf einer Umgebung von $\overline{U \cdot A}$ und

$$t_0 := \inf \left\{ t : 0 < t \le 1,\ f \text{ auf keine Umgebung von } \overline{\bigcup_{0 \le t \le t_0} U \cdot \gamma_t(A)} \text{ fortsetzbar} \right\}$$

ist größer als 0. Dann ist f meromorph fortsetzbar auf jede Menge $\bigcup_{0 \le t \le t_1} U \cdot \gamma_t(A)$ mit $t_1 < t_0$ und somit auf die Menge

$$\bigcup_{0 \le t < t_0} U \cdot \gamma_t(A) = \bigcup_{0 \le t \le t_0} U \cdot \gamma_t(A).$$

Die Menge $A^0 := \bigcup_{0 \le t \le t_0} \gamma_t(A)$ erfüllt die Voraussetzungen von 12.4. Dann ist 12.3 anwendbar: f ist fortsetzbar auf eine Umgebung von $\overline{U \cdot A^0}$. Dies ist der Widerspruch zur Wahl von t_0, w.z.b.w.

Damit ist der Fortsetzungssatz im Wesentlichen bewiesen. Sei nämlich f meromorph auf der offenen zusammenhängenden Umgebung V der analytischen Menge $A \subset X$ mit $2 \dim A > n$. Zunächst findet man ein Schlauchgebiet $U \cdot A$ mit $\overline{U \cdot A} \subset V$. Ist $x \in X$ beliebig, so bezeichne man mit $\gamma_t^{(x)} : [0,1] \to G$ einen stetigen Weg, der $\gamma_0^{(x)} = \varepsilon$ und $\gamma_1^{(x)}(A) \ni x$ erfüllt. Nach dem soeben Bewiesenen ist f längs dieses Weges auf eine Umgebung von $\overline{U \cdot A_x}$, $A_x := \bigcup_{0 \le t \le 1} \gamma_t^{(x)}(A)$, fortsetzbar.

Ist $y \in X$ ein weitere Punkt und $\gamma_t^{(y)}$ ein entsprechender weg, so sieht man durch Hintereinanderschaltung der beiden Wege $\gamma_t^{(x)}$ und $\gamma_t^{(y)}$ ein, daß f meromorph fortsetzbar ist auf eine Umgebung von $\overline{U \cdot A_{xy}}$, $A_{xy} := \bigcup_{0 \le t \le 1} \gamma_t^{(y)} A_x$. Wegen $A_x \in A_{xy}$ und $A_y \in A_{xy} = A_{yx}$ sind die Fortsetzungen nach x und y verträglich. Somit wird durch alle Fortsetzungen entlang allen Wegen $\gamma_t^{(x)}$, $x \in X$, eine meromorphe Funktion auf X definiert.

LITERATUR

[1] Y. AKIZUKI: Theorems of Bertini on Linear Systems. J.M.S.J. 3, 170-180 (1951)

[2] A. ANDREOTTI: Théorèmes de Dependance Algébriques sur les espaces pseudoconcaves. Bull.S.M.Fr. 91, 1-38 (1963)

[3] A. BOREL und A. HAEFLIGER: La classe d'homologie fondamentale d'un espace analytique. Bull.S.M.Fr. 89, 461-513 (1961)

[4] W. L. CHOW: On compact complex analytic varieties. Am.J.M. 71, 893-914 (1949)

[5] H.FUJIMOTO: On the continuation of analytic sets. J.M.S.J. 18, 51-85 (1966)

[6] B. GIESECKE: Simpliziale Zerlegungen abzählbarer analytischer Räume. M.Z. 83, 177-213 (1964)

[7] H. GRAUERT und R. REMMERT: Espaces analytiquement complets C.R.Ac.Sc. Paris 245, 882 - 885 (1957)

[8] H. GRAUERT und R. REMMERT: Komplexe Räume M.Ann. 136, 245-318 (1958)

[9] F. HIRZEBRUCH: Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie. 2. Aufl. Springer 1962

[10] H. HOPF: Zur Algebra der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten. J.reine u.angew.M. 163, 71-88 (1930)

[11] S. KLEIMAN: Toward a numerical theory of ampleness. Ann.M. 84, 293-344 (1966)

[12] R. NARASIMHAN: Introduction to the theory of analytic spaces. Springer Lecture Notes 25 (1966)

[13] R. REMMERT: Holomorphe und meromorphe Abbildungen komplexer Räume. M.Ann. 133, 328-370 (1957)

[14] R. REMMERT und K. STEIN: Eigentliche holomorphe Abbildungen. M.Z. 73, 159-189 (1960)

[15] R. REMMERT und T. VAN DE VEN: Über holomorphe Abbildungen projektiv-algebraischer Mannigfaltigkeiten auf komplexe Räume. M.Ann. 142, 453-486 (1961)

[16] R. REMMERT und T. VAN DE VEN: Zur Funktionentheorie homogener komplexer Mannigfaltigkeiten. Topology 2, 137-157 (1963)

[17] W. ROTHSTEIN: Die invariante Fassung des Kontinuitätssatzes für meromorphe Funktionen. Arch.M. 1, 119-126 (1948-49)

[18] W. ROTHSTEIN: Zur Theorie der analytischen Mannigfaltigkeiten im Raume von n komplexen Veränderlichen. M.Ann. 129, 96-138 (1955)

[19] J. P. SERRE: Lie algebras and Lie groups. Benjamin Inc. New York 1965

[20] K. STEIN: Analytische Zerlegungen komplexer Räume. M.Ann. 132, 63-93 (1956)

[21] A. WEIL: Foundations of algebraic geometry. New York 1946.

LEBENSLAUF

Am 20. Oktober 1942 wurde ich als erster Sohn des städt. Beamten Hans Barth und seiner Ehefrau Gertrud, geb. Büchner, in Wernigerode/Harz geboren.

Die Volksschule besuchte ich von Herbst 1948 ab zunächst in Simmelsdorf, Landkreis Lauf a.d. Pegnitz und später in Nürnberg. 1952 trat ich hier in die Hans-Sachs-Oberrealschule ein, an der ich mich 1961 der Reifeprüfung unterzog. Seit dem Wintersemester 1961/62 studierte ich Mathematik und Physik an den Universitäten Erlangen und Göttingen. Das Staatsexamen legte ich 1965 in Erlangen ab. Seitdem beschäftigte ich mich unter der Anleitung der Professoren R. Remmert und H. Grauert in Göttingen vorwiegend mit komplexer Analysis.

Böhnecke-Druck 3302 Clausthal-Z. 29